



**ФЕДЕРАЛЬНАЯ СЛУЖБА  
ПО ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СОБСТВЕННОСТИ**

**(12) ОПИСАНИЕ ИЗОБРЕТЕНИЯ К ПАТЕНТУ**

(21)(22) Заявка: 2013116395/28, 10.04.2013

(24) Дата начала отсчета срока действия патента:  
10.04.2013

Приоритет(ы):

(22) Дата подачи заявки: 10.04.2013

(43) Дата публикации заявки: 20.10.2014 Бюл. № 29

(45) Опубликовано: 10.09.2015 Бюл. № 25

(56) Список документов, цитированных в отчете о поиске: RU 2283475 C1, 10.09.2006. RU 2275642 C2, 27.04.2006. RU 2297006 C2, 10.04.2007. JP 0061017015 A, 25.01.1986. RU 2437062 C2, 20.12.2011. US 5367528 A1, 22.11.1994

Адрес для переписки:

347928, Ростовская обл., г. Таганрог, ГСП-17А,  
Некрасовский пер., 44, Южный федеральный  
университет

(72) Автор(ы):

**Петров Борис Михайлович (RU)**

(73) Патентообладатель(и):

**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Южный федеральный университет" (Южный федеральный университет) (RU)**

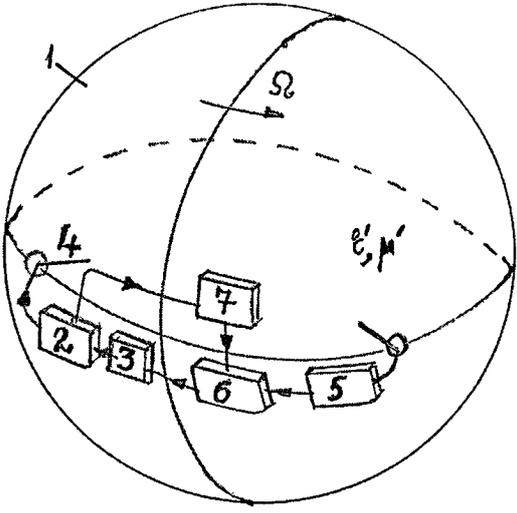
**(54) РЕЗОНАНСНЫЙ СПОСОБ ИЗМЕРЕНИЯ ЧАСТОТЫ ВРАЩЕНИЯ ОБЪЕКТА И УСТРОЙСТВО, РЕАЛИЗУЮЩЕЕ ЭТОТ СПОСОБ**

(57) Реферат:

Изобретение относится к области точного приборостроения и может быть использовано при создании таких средств измерения угловой скорости вращения объектов, как гироскопы. В резонансном способе измерения частоты вращения объекта измеряемую частоту вращения определяют как разность между собственной частотой вращения полости на выбранном типе электромагнитного колебания и собственной частотой «неподвижной» полости на том же типе колебания, деленную на постоянное число, определяемое выбранным при расчете полости типом колебания, а направление вращения определяют знаком этой разности. Устройство, реализующее резонансный способ измерения частоты вращения объекта, содержит монохроматический автогенератор перестраиваемой частоты, зонд-возбудитель, детектор электромагнитного поля, устройство перестройки частоты автогенератора, частотомер

и решающее устройство, которое вычисляет частоту вращения как разность между резонансной частотой вращения полости и резонансной частотой «неподвижной» полости, деленную на постоянное число, определяемое выбранным при расчете полости типом электромагнитного колебания, а направление вращения определяет знаком этой разности. 2 н.п. ф-лы, 1 ил.

RU 2 5 6 2 1 4 9 C 2



RU 2 5 6 2 1 4 9 C 2



FEDERAL SERVICE  
FOR INTELLECTUAL PROPERTY

(12) **ABSTRACT OF INVENTION**

(21)(22) Application: 2013116395/28, 10.04.2013  
 (24) Effective date for property rights:  
10.04.2013  
 Priority:  
 (22) Date of filing: 10.04.2013  
 (43) Application published: 20.10.2014 Bull. № 29  
 (45) Date of publication: 10.09.2015 Bull. № 25  
 Mail address:  
 347928, Rostovskaja obl., g. Taganrog, GSP-17A,  
 Nekrasovskij per., 44, Juzhnyj federal'nyj universitet

(72) Inventor(s):  
Petrov Boris Mikhajlovich (RU)  
 (73) Proprietor(s):  
Federal'noe gosudarstvennoe avtonomnoe obrazovatel'noe uchrezhdenie vysshego professional'nogo obrazovanija "Juzhnyj federal'nyj universitet" (Juzhnyj federal'nyj universitet) (RU)

(54) **RESONANT MEASURING METHOD OF ROTATION FREQUENCY OF OBJECT AND DEVICE IMPLEMENTING THIS METHOD**

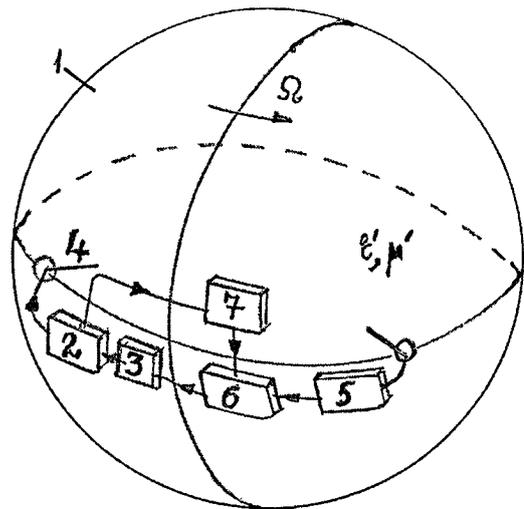
(57) Abstract:

FIELD: measurement equipment.

SUBSTANCE: invention relates to accurate instrument building and can be used at creation of such measuring devices of angular rotation frequency of objects as gyroscopes. According to the resonant measuring method of the object rotation frequency, the measured rotation frequency is determined as difference between proper rotation frequency of the cavity on the chosen type of electromagnetic oscillation and proper frequency of the fixed cavity on the same type of oscillation, which is divided by a constant number determined by the type oscillation chosen at calculation of the cavity, and rotation direction is determined by the sign of the same difference. The device implementing the resonant measuring method of object rotation frequency includes a monochromic active oscillator of retuned frequency, a probe-exciter, an electromagnetic field detector, a device for retuning of frequency of the active oscillator, a frequency meter and a resolver that calculates rotation frequency as difference between resonant rotation frequency of the cavity and resonant frequency of the fixed cavity, which

is divided by a constant number determined by the type of electromagnetic oscillation chosen at calculation of the cavity, and direction of rotation is determined by the sign of the same difference.

EFFECT: improving efficiency of the method.  
2 cl, 1 dwg



RU 2 562 149 C2

RU 2 562 149 C2

Предлагаемое изобретение относится к области точного приборостроения и может быть использовано при создании таких средств измерения угловой скорости вращения объектов, как гироскопы.

Способ измерения частоты вращения гироскопов, основанный [Панов М.Ф., Соломонов А.В., Филатов Ю.В. Физические основы интегральной оптики. - М.: изд. Радиоэлектроника. 2010. - 432 с., Бычков СИ., Лукьянов Д.П., Бакаляр А.И. Лазерный гироскоп. - М.: Сов. радио. 1975. - 424 с.] на применении так называемого «оптического вихревого эффекта Саньяка», проявляющегося в изменении времени обхода электромагнитным (ЭМ) полем замкнутого контура L во внутренней полости при вращении последнего относительно инерциальной системы отсчета. Считается, что в таком интерферометре ЭМ-поле, распространяясь в двух противоположных - относительно направления вращения - направлениях, испытывает разный набег фазы, а разность фаз пропорциональна частоте вращения  $\Omega$ . Интерференционная картина сдвигается, величина этого сдвига используется для измерения скорости (частоты) вращения с помощью частотомера и решающего устройства (фотопластины, фотоприемника и др.).

Фазовый сдвиг во вращающихся интерферометрах вычисляется на основе разного рода допущений. В ряде работ, например, в [Лауэ М. К опыту Ф.Харреса. // В кн. Статьи и речи. - М. Изд. Наука, пер. с нем. 1969. С.367] и во многих других, допускается возможность существования скорости распространения ЭМ-поля большей скорости света  $c$ , в других работах вычисления производятся на основе электродинамики классической физики. Но результаты вычислений одинаковы - они получены еще Максом Лауэ: расчетное соотношение для разности времен прохождения ЭМ-полями путей по направлению движения часовой стрелки и против движения часовой стрелки  $\Delta t = 8\pi FS/c^2$ , где  $F = \Omega/2\pi$  - число оборотов интерферометра в секунду,  $S$  - площадь, ограниченная «путями распространения ЭМ-поля». Разность фаз ЭМ-полей при этом за счет разности хода вычисляется по формуле

$$\Delta\Phi = \omega_0 \Delta t = 8\pi S \Omega / c \lambda_0, \quad (1)$$

где  $\omega_0$  и  $\lambda_0$  - частота и длина волны тока излучающего источника.

Но А.Зоммерфельд [Зоммерфельд А. Оптика / А.Зоммерфельд. - М.: Изд. ИЛ. - 1953. - 486 с.], а потом и М.Лауэ [Лауэ М. К опыту Ф.Харреса. // В кн. Статьи и речи. - М. Изд. Наука, пер. с нем. 1969. С.367] показали, что для вычисления разности фаз  $\Delta\Phi$  необходимо поставить и решить граничную задачу в неинерциальной системе отсчета, поскольку на ЭМ-поле во вращающемся интерферометре или резонаторе воздействуют гравитационные силы.

Попытки строгих постановки и решения этой задачи предприняты в многочисленных работах (см. библиографию в [Бычков СИ., Лукьянов Д.П., Бакаляр А.И. Лазерный гироскоп. - М.: Сов. радио. 1975. - 424 с., Лауэ М. К опыту Ф.Харреса. // В кн. Статьи и речи. - М. Изд. Наука, пер. с нем. 1969. С.367, Post E.J., Vildiz A., Cavity Resonances in Accelerated Systems. // Physical Review Letters. 1965. V.15, №5, pp.177-178., Хромых А.М. Кольцевой генератор во вращающейся системе отсчета. // ЖЭТФ. 1966. Т.50. Вып.1. С.281-282., Andersson Y.L., Ryon J.W. Electromagnetic Radiation in Accelerated Systems. // Physical Review. 1969. V.181.№5. P.1765-1775, Белоногов А.М. Электромагнитные колебания в объемном резонаторе во вращающейся системе отсчета // ЖТФ. 1969. Т.39, вып.7. С.1170-1176]). Но при этом применялась или нековариантная формулировка уравнений Максвелла, или в материальных, или в дифференциальных уравнениях делались упрощающие допущения, что приводило к решениям, эквивалентным, по

существованию, решениям классической электродинамики. Поэтому расчеты радиоэлектронных гироскопов основаны на приближенных представлениях об ЭМ-поле.

В соответствии с выражением (1) считается, что в случае резонатора «изменение его периметра» при вращении приведет к изменению «частот настройки» для «встречных волн», разность частот

$$\Delta\omega = 8\pi S\Omega / \lambda L, \quad (1a)$$

где  $\lambda = 4\pi c / (\omega_1 + \omega_2)$  - средняя длина волны,  $\omega_1$  и  $\omega_2$  - частоты настройки вращающегося кольцевого резонатора для «волн», распространяющихся в направлении вращения и против последнего.

Из решения задачи о возможности распространения ЭМ-поля во вращающемся резонаторе на основе ряда допущений получена разность частот («расщепление» частот) встречных волн  $\Delta\omega = 2(\Omega c_{\kappa})$ , где  $\Omega$  и  $c_{\kappa}$  - векторы частоты вращения и коэффициента «расщепления собственных частот». «Расчет последнего представляет большие трудности и может быть произведен только на основе ряда упрощений» [Бычков СИ., Лукьянов Д.П., Бакаляр А.И. Лазерный гироскоп. - М.: Сов. радио. 1975. - 424 с.].

Эти упрощения использованы при расчетах параметров ЭМ-полей, например, в патентах «Волоконно-оптический тахометр» (патент РФ №2275642), «Волоконно-оптический тахометр» (патент РФ №2297006), «Твердотельный лазерный гироскоп с механически активируемой усиливающей средой» (патент РФ №2437062), «Лазерный гироскоп» (патент РФ №2364837), «Волоконно-оптический гироскоп» (патент РФ №2283475).

Из основных расчетных выражений (1) и (1a) следуют выводы: отношение площади интерферометра к длине волны источника ЭМ-поля должно быть большим для того, чтобы разность фаз ДФ была измеряемой величиной. Это означает, что, во-первых, ЭМ-поле должно использоваться только оптического диапазона длин волн, а во-вторых, вращающиеся интерферометры должны работать при этом в многомодовом режиме. Частота вращения при этом измеряется с помощью измерителя разности фаз и решающего устройства по разности фаз ДФ, т.е. косвенным способом.

Известен радиолокационный способ измерения скорости вращения объекта (Петров Б.М. «Радиолокационный способ измерения скорости вращения», авторское свидетельство №278269), в котором контролируемый объект облучается ЭМ-полем. Рассеянное (отраженное, вторичное) ЭМ-поле за счет модуляции поля при вращении объекта имеет дискретный спектр частот, спектральные составляющие которого в общем случае сдвинуты по оси частот на частоту вращения. Вычисляя разность частот между соседними спектральными составляющими, можно определить частоту вращения.

Ниже для обоснования предлагаемого нового резонансного (радиоэлектронного) способа измерения частоты вращения объекта по внутреннему электромагнитному полю в полости этого объекта даны на основе ковариантных уравнений электродинамики строгие постановки и решения граничных задач о возможности существования полей колебаний электрического и магнитного типов во вращающемся шаровом резонаторе. Приведен анализ результатов решения. Приведены и основные результаты строгого решения граничной задачи о возможности существования поля электрического типа колебаний в коаксиальном резонаторе гироскопа.

Электромагнитные колебания во вращающемся шаровом резонаторе

Постановка граничных задач. Введем в свободное пространство инерциальную (декартову) систему отсчета  $K'(x', y', z', ict) = K'(R', \theta', \varphi', ict) = K'(x^j)$ , где  $i$  - мнимая единица,

t - время,  $x^j=(x^1, x^2, x^3, x^0)$ ,  $x^j=(R', \theta', \varphi')$  - сферические координаты ( $\alpha'=1', 2', 3'$ ), и покаящуюся в ней точку наблюдения  $P'(x^j, i, ct)$ . Шаровой резонатор, образованный металлической сферической оболочкой радиуса  $a$  проводимости  $\sigma_1$ , пространство  
 5 внутри которой заполнено изотропной однородной линейной средой без джоулевых потерь и гистерезиса с диэлектрической  $\epsilon=\epsilon_0\epsilon'$  и магнитной  $\mu=\mu_0\mu'$  проницаемостями, где  $\epsilon_0$  и  $\mu_0$  - электрическая и магнитная постоянные, вращается относительно точки  $P'$  с постоянной угловой частотой  $\Omega$ . Введем жесткую вращающуюся систему отсчета  $K$   
 10  $(R, \theta, \varphi, t)=K(x^j, t)$ . Начала сферических систем координат поместим в центре шара, а полярную ось ( $\theta=\theta'=0$ ) направим вдоль оси вращения. Обозначим через  $P(p^\alpha, t)$ , где  $p^\alpha=p^\alpha(x^1, x^2, x^3)=p^\alpha(R, \theta, \varphi)$ , покаящуюся в системе отсчета  $K$  точку наблюдения ЭМ-поля. При этом  $R'=R, \theta'=\theta, \varphi'=\varphi+\Omega t$ . Параметры  $\sigma_1, \epsilon, \mu$  и  $a$  считаем измеренными в системе  
 15 отсчета  $K$ . Полагаем, что область сторонних источников, возбуждающих ЭМ-поле на частоте  $\omega_0(\lambda_0$  - длина волны), измеренной во времени  $t$ , выведена из объема резонатора.

Необходимо рассмотреть возможность существования ЭМ-поля в объеме вращающегося резонатора.

Уравнения Максвелла в резонаторе в системе отсчета  $K$  однородны и могут быть  
 20 записаны в соответствии с [Петров Б.М. Прикладная электродинамика вращающихся тел. - М.: Горячая линия - Телеком, 2009. - 288 с.] в трехмерной форме для ковариантного вектора напряженности электрического поля  $E_\alpha=(E_1, E_2, E_3)=(E_R, R E_\theta, R \sin \theta E_\varphi)=E$ , для  
 напряженности магнитного поля - контравариантной бивекторной плотности веса

25  $+1 - \overset{\wedge}{H}^{\alpha\beta} = (\overset{\wedge}{H}^{\alpha 23}, -\overset{\wedge}{H}^{\alpha 13}, \overset{\wedge}{H}^{\alpha 12}) = (\overset{\wedge}{H}_R, R \overset{\wedge}{H}_\theta, R \sin \theta \overset{\wedge}{H}_\varphi) = \overset{\wedge}{H}$ , для электрической индукции  
 - контравариантной векторной плотности веса

30  $+1 - \overset{\wedge}{D}^\alpha = (\overset{\wedge}{D}^{\alpha 1}, \overset{\wedge}{D}^{\alpha 2}, \overset{\wedge}{D}^{\alpha 3}) = (R^2 \sin^2 \theta \overset{\wedge}{D}^R, R \sin \theta \overset{\wedge}{D}^\theta, R \overset{\wedge}{D}^\varphi) = \overset{\wedge}{D}$ , для ковариантного  
 бивектора магнитной индукции  $B_{\alpha\beta}=(B_{23}, -B_{13}, B_{12})=(R^2 \sin \theta B_{\theta\varphi}, -R \sin \theta B_{R\varphi}, R B_{R\theta})=B$ :

$$\text{rot } \overset{\wedge}{H} = \frac{\partial \overset{\wedge}{D}}{\partial t}, \text{rot } E = -\frac{\partial \overset{\wedge}{B}}{\partial t}, \text{div } \overset{\wedge}{D} = 0, \text{div } B = 0, \quad (2)$$

35 где компоненты напряженностей полей и индукций входят в дуальных формах. В системе отсчета  $K$  ЭМ-поле, удовлетворяющее уравнениям (2), с помощью материальных уравнений, полученных в [Петров Б.М. Прикладная электродинамика вращающихся тел. - М.: Горячая линия - Телеком, 2009. - 288 с.], и вспомогательных  
 40 функций  $v^E$  и  $v^M$ , которые имеют смысл электрического и магнитного потенциалов Дебая в неинерциальной системе отсчета и которые удовлетворяют волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 v^{E,M}}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial v^{E,M}}{\partial R} + \frac{1-\beta^2}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v^{E,M}}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial v^{E,M}}{\partial \theta} + \frac{2\beta}{v_\phi R \sin \theta} \frac{\partial^2 v^{E,M}}{\partial \varphi \partial t} - \frac{1}{v_\phi^2} \frac{\partial^2 v^{E,M}}{\partial t^2} = 0, \quad (3)$$

45 где  $\beta=\Omega R \sin \theta / v_\phi$ ,  $v_\phi=(\epsilon\mu)^{-1/2}$ , разделяется на ЭМ-поле колебаний электрического типа (E-колебаний), когда радиальная компонента бивектора магнитной индукции  $B_{\theta\varphi}=0$ , или  $B_R=0$ , и на ЭМ-поле колебаний магнитного типа (H-колебаний), когда радиальная

компонента векторной плотности электрической индукции  $\hat{D}^R = 0$ . При этом в случае E-колебаний для компонент ЭМ-поля получаем

$$E_{\theta}^3 = \frac{1}{R} \frac{\partial^2(RV^3)}{\partial\theta\partial R}, E_{\varphi}^3 = \frac{1}{R \sin\theta} \frac{\partial^2(RV^3)}{\partial\varphi\partial R}, \quad (4)$$

$$H_{\theta}^3 = \frac{i\omega_0 \varepsilon}{R \sin\theta} \frac{\partial RV^3}{\partial\varphi} + \frac{\varepsilon W}{\mu R^2} \frac{\partial}{\partial\theta} \beta \frac{\partial(RV^3)}{\partial\theta};$$

$$H_{\varphi}^3 = -\frac{i\omega_0 \varepsilon}{R} \frac{\partial RV^3}{\partial\theta} + \frac{\varepsilon W \beta}{\mu R^2 \sin\theta} \frac{\partial^2(RV^3)}{\partial\varphi\partial\theta};$$

$$E_R^3 = \frac{1-\beta^2}{\varepsilon} \hat{D}^R - \beta W H_{\theta}^3, H_R^3 = W^{-1} \beta E_{\theta}^3; \quad (5)$$

$$\hat{D}^R = -\frac{2}{R^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \sin\theta \frac{\partial RV^3}{\partial\theta} - \frac{2}{R^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 RV^3}{\partial\varphi^2},$$

где радиальная компонента  $H_R^3$  по (5) отличается от нуля и пропорциональна коэффициенту  $\beta$  и обратно пропорциональна характеристическому сопротивлению  $W = (\mu/\varepsilon)^{1/2}$ .

В случае H-колебаний для компонент ЭМ-поля получаем при  $B_{\theta\varphi}=0$ :

$$E_{\theta}^M = -\frac{i\omega_0 \mu}{R \sin\theta} \frac{\partial RV^M}{\partial\varphi} - \frac{W}{R^2} \frac{\partial}{\partial\theta} \beta \frac{\partial(RV^M)}{\partial\theta}; \quad (6)$$

$$E_{\varphi}^M = -\frac{i\omega_0 \mu}{R} \frac{\partial RV^M}{\partial\theta} - \frac{\beta W}{R^2 \sin\theta} \frac{\partial^2(RV^M)}{\partial\varphi\partial\theta}; \quad (7)$$

$$H_{\theta}^M = \frac{1}{R} \frac{\partial^2(RV^M)}{\partial\theta\partial R}, H_{\varphi}^M = \frac{1}{R \sin\theta} \frac{\partial^2(RV^M)}{\partial\varphi\partial R};$$

$$H_R^M = \frac{1-\beta^2}{\mu} B_{\theta\varphi} + W^{-1} \beta E_{\theta}^M; E_R^M = -\beta W H_{\theta}^M; \quad (8)$$

$$B_{\theta\varphi} = -\frac{\mu}{R^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \sin\theta \frac{\partial RV^M}{\partial\theta} - \frac{\mu}{R^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 RV^M}{\partial\varphi^2}, \quad (9)$$

где радиальная компонента  $E_R^M$  по (8) отличается от нуля и пропорциональна коэффициенту  $\beta$  и  $W$ .

В математической модели считаем проводимость металлической оболочки  $\sigma_1$  идеальной. Тогда на поверхности оболочки в случае E-волн касательные к оболочке компоненты  $E_{\theta}^3$  и  $E_{\varphi}^3$  должны обращаться в нуль, т.е.  $E_{\theta}^3 = E_{\varphi}^3 = 0$  при  $R=a$ . Значит, в соответствии с (4) необходимо выполнение условия для электрического потенциала Дебая

$$\frac{\partial}{\partial R}(RV^3(P)) = 0 \text{ при } R = a. \quad (10)$$

При этом нормальная к поверхности оболочки составляющая  $H_R^3$  при  $R=a$  тоже

обращается в нуль, т.е. удовлетворяются граничные условия и для магнитного поля.

В случае колебаний магнитного типа компоненты  $E_{\theta}^M$  и  $E_{\varphi}^M$  при  $R=a$  должны обращаться в нуль. Значит, в соответствии с (6) и (7) необходимо выполнение граничного условия для магнитного потенциала Дебая

$$V^M(P) = 0 \quad R = a. \quad (11)$$

При этом нормальная к поверхности оболочки составляющая  $H_R^M$  при  $R=a$  тоже обращается в нуль, т.е. удовлетворяются граничные условия и для магнитного поля.

Решение граничной задачи для ЭМ-поля Е-колебаний

Характеристическим решением уравнения (3) во вращающейся системе отсчета со сферическими координатами, конечным при  $\theta=0$  и  $\theta=\pi$ , является пространственная гармоника

$$v \frac{\partial}{\partial r}(P) = e^{i\omega_0 t} P_n^m(\cos\theta) e^{-im\varphi} j_n(k_m R), \quad |m| \leq n, \quad (12)$$

где  $P_n^m(\cos\theta)$  - присоединенные полиномы Лежандра, определенные по [Гобсон Е.В. Теория сферических и сфероидальных функций. М.: Изд. ИЛ. 1952. - с.92],  $j_n(k_m R)$  - сферические функции Бесселя,  $k_m = k_0 + m\Omega/v_{\phi}$ ,  $k_0 = \omega_0/v_{\phi}$ ,  $n$  и  $m$  - целые числа.

Подставляя (12) в граничное условие (10), получаем

$$\frac{\partial}{\partial a} (a j_n(k_m^3 a)) = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial}{\partial(k_m a)} [k_m a j_n(k_m^3 a)] = 0$$

Решениями этого дисперсионного уравнения являются корни  $u_{nq}^3$ , где  $q=1, 2, 3, \dots$

При этом  $k_{mnq}^3 a = u_{nq}^3$ , т.е. собственными (резонансными) частотами вращающегося резонатора являются

$$\omega_{0,mnq}^{3,рез} = \frac{v_{\phi} u_{nq}^3}{a} - m\Omega, \quad |m| \leq n.$$

Для зональной гармоник, когда  $m=0$ , собственные частоты вращающегося

резонатора  $\omega_{0,0nq}^{3,рез} = \frac{v_{\phi} u_{nq}^3}{a}$  совпадают с собственными частотами «неподвижного»

резонатора (при  $\Omega=0$ ). Поэтому зональная гармоника ЭМ-поля информации о частоте вращения не несет.

$$\text{Имеем } \omega_{0,mnq}^{3,рез} = \omega_{0,0nq}^{3,рез} - m\Omega, \quad |m| \leq n. \quad (13)$$

Существование ЭМ-поля  $E_{mnq}$ -колебаний возможно только на дискретных частотах (13). Поэтому

$$v_{mnq}^3(P) = \exp[i(\omega_{0,0nq}^{3,рез} - m\Omega)t] P_n^m(\cos\theta) e^{-im\varphi} j_n\left(\frac{u_{nq}^3}{a} R\right), \quad |m| \leq n. \quad (14)$$

На заданной резонансной частоте  $\omega_{0,mnq}^{3,рез}$  компоненты ЭМ-поля  $E_{mnq}$ -колебаний получаются с помощью выражений (4), (5) и (14).

Решение граничной задачи для ЭМ-поля Н-колебаний

Характеристическим решением уравнения (3) в системе отсчета К со сферическими координатами является пространственная гармоника

$$V_{mn}^M(P) = e^{i\omega_0 t} P_n^m(\cos \theta) e^{-im\varphi} j_n(k_m R), |m| \leq n. \quad (15)$$

Удовлетворяя граничному условию (11), получаем дисперсионное уравнение  $j_n(k_m^M a) = 0$ ,

решениями которого являются корни  $k_{mnq}^M a = u_{nq}^M$ , где  $q=1, 2, 3, \dots$ , т.е. собственными частотами вращающегося резонатора являются

$$\omega_{0,mnq}^{\text{э,рез}} \frac{v_\phi u_{nq}^M}{a} - m\Omega, |m| \leq n. \quad (16)$$

Существование ЭМ-поля  $H_{mnq}$ -колебаний возможно только на этих дискретных частотах. Из (15) имеем пространственную гармонику потенциала Дебая  $H_{mnq}$ -колебаний:

$$V_{mnq}^M(P) = \exp[i(\omega_{0,mnq}^{\text{э,рез}} - m\Omega)t] P_n^m(\cos \theta) e^{-im\varphi} j_n\left(\frac{u_{nq}^M}{a} R\right), |m| \leq n. \quad (17)$$

На заданной резонансной частоте  $\omega_{0,mnq}^{\text{э,рез}}$  компоненты ЭМ-поля  $H_{mnq}$ -колебаний получаются с помощью выражений (6)-(9) и (17).

Анализ ЭМ-полей  $E_{mnq}$ - и  $H_{mnq}$ -колебаний. Назовем  $\omega_{0,0nq}^{\text{э,м,рез}}$  собственными частотами «неподвижного» резонатора,  $\omega_{0,mnq}^{\text{э,м}}$  - собственными частотами вращающегося резонатора. В соответствии с (13) и (16) для тессеральных гармоник с  $m < 0$  имеем  $\omega_{0,mnq}^{\text{э,м,рез}} > \omega_{0,0nq}^{\text{э,м,рез}}$ , а для тессеральных гармоник с  $m > 0$   $\omega_{0,mnq}^{\text{э,м,рез}} < \omega_{0,0nq}^{\text{э,м,рез}}$ . Из выражений (13) и (16) следует: каждое собственное значение частоты «неподвижного» резонатора «расщепляется» на  $2n$  собственных частот во вращающемся резонаторе. Происходит это из-за влияния на ЭМ-поле тессеральных гармоник, распространяющихся по направлению вращения и против этого направления, сил Кориолиса разных знаков. Среда, заполняющая вращающийся резонатор, становится анизотропной средой для распространяющегося ЭМ-поля.

Если «неподвижный» резонатор настроен на ЭМ-поле  $H_{011}$ -колебания, то  $u_{11}^M = 4,5$ ,

$\omega_{0,011}^M = v_\phi 4,5 / a$ . Тогда имеем две собственные частоты вращающегося резонатора  $\omega_{0,111}^{\text{э,рез}} = 4,5v_\phi / a - \Omega$  и  $\omega_{0,-111}^{\text{э,рез}} = 4,5v_\phi / a + \Omega$ . Разность «расщепления» резонансных частот вращающегося резонатора

$$\Delta\omega = \omega_{0,-111}^{\text{э,рез}} - \omega_{0,111}^{\text{э,рез}} = 2\Omega.$$

Для «неподвижного» резонатора, рассчитанного на применение ЭМ-поля  $H_{012}$ -колебания, имеем  $u_{12}^M = 7,64$ ,  $\omega_{0,012}^{\text{э,рез}} = v_\phi 7,64 / a$ . Тогда получаем две собственные частоты вращения:  $\omega_{0,111}^{\text{э,рез}} = 4,5v_\phi / a - \Omega$  и  $\omega_{0,-111}^{\text{э,рез}} = 4,5v_\phi / a + \Omega$ . Разность «расщепления» резонансных частот вращающегося резонатора  $\Delta\omega = 2\Omega$ .

Пусть резонатор настроен на ЭМ-поле  $H_{021}$ -колебания. При этом  $u_{21}^M = 5,8$ ,

$\omega_{0,021}^{\text{э,рез}} = v_\phi 5,8 / a$ . Имеем 4 собственные частоты вращающегося резонатора:

$$\omega_{0,121}^{м,рез} = v_{\phi} 5,8/a - \Omega, \quad \omega_{0,-121}^{м,рез} = v_{\phi} 5,8/a + \Omega \text{ и } \omega_{0,221}^{м,рез} = v_{\phi} 5,8/a - 2\Omega$$

$\omega_{0,-221}^{м,рез} = v_{\phi} 5,8/a + 2\Omega$ . Разность «расщепления» крайних резонансных частот вращающегося резонатора равна  $4\Omega$ .

Если резонатор рассчитан на применение ЭМ-поля  $E_{011}$ -колебания, то  $u_{11}^3 = 2,75$ ,

$\omega_{0,011}^{0,рез} = v_{\phi} 2,75/a$ . Имеем две собственные частоты вращающегося резонатора:

$$\omega_{0,111}^{3,рез} = \frac{v_{\phi} 2,75}{a} - \Omega \text{ и } \omega_{0,-111}^{3,рез} = v_{\phi} 2,75/a + \Omega. \text{ Разность «расщепления» резонансных}$$

частот вращающегося резонатора равна  $2\Omega$ .

Частота  $\omega_{0,111}^{3,рез}$  является наименьшей из всех возможных собственных

частот вращающегося резонатора. Поэтому  $E_{111}$ -колебание вращающегося

резонатора, несущее информацию о частоте вращения, назовем основным. Остальные типы  $E_{mnq}$ - и  $H_{mnq}$ -колебаний вращающегося резонатора назовем высшими типами (модами).

В случае основного типа  $E_{111}$ -колебания компоненты ЭМ-поля, отличающиеся от нуля, получим из (4), (5) и (14). Поскольку  $P_1^1(\cos\theta) = -\sin\theta$ , то

$$v_{111}^3(P) = -\sin\theta e^{-i\omega} j_1\left(\frac{u_{11}^3 R}{a}\right) \exp(\omega_{0,111}^{3,рез} t),$$

$$\left. \begin{aligned} E_{\theta,111}^3 &= A \cos\theta e^{-i\varphi} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} R j_1\left(\frac{u_{11}^3 R}{a}\right) \times \\ E_{\varphi,111}^3 &= -iA e^{-i\varphi} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} R j_1\left(\frac{u_{11}^3 R}{a}\right) \times \\ H_{\theta,111}^3 &= (\omega_{0,111}^{3,рез} + \Omega \cos 2\theta) \epsilon A e^{-i\varphi} j_1\left(\frac{u_{11}^3 R}{a}\right) \times \\ H_{\varphi,111}^3 &= -i(\omega_{0,111}^{3,рез} + \Omega) \epsilon A \cos\theta e^{-i\varphi} j_1\left(\frac{u_{11}^3 R}{a}\right) \times \\ H_{R,111}^3 &= W^{-1} \beta E_{\theta,111}^3 \times \\ D_{R,111}^{\wedge} &= -\frac{2A \epsilon \cos^2 \theta}{\sin \theta} e^{-i\varphi} \frac{1}{R} j_1\left(\frac{u_{11}^3 R}{a}\right) \times \\ E_{R,111}^3 &= \frac{1 - \beta^2}{\epsilon} D_{R,111}^{\wedge} - \beta W H_{\theta,111}^3 \times \end{aligned} \right\} \times \exp(\omega_{0,111}^{3,рез} t),$$

где  $A$  - постоянный коэффициент.

Рассмотрим случай, когда электрический радиус вращающегося резонатора такой, что в нем существуют, наряду с основным, высшие типы колебаний (многомодовый режим). При этом число типов колебаний с  $m > 0$  определяется приближенно величиной

$m_{\text{макс}} \approx v_N k_0 a$ , а число типов колебаний с  $m < 0$  - величиной  $m_{\text{мин}} \approx -v_N k_0 a$ , где  $v_N$  - коэффициент, зависящий от  $k_0 a$  и чувствительности измерительной аппаратуры [Петров Б.М. Прикладная электродинамика вращающихся тел. - М: Горячая линия - Телеком, 2009. - 288 с/]. Тогда разность «расщепления» всех возможных собственных частот вращающегося резонатора  $\Delta\omega \approx v_N 2k_0 a \Omega$ . Если приближенно считать, что «время обхода» контура  $L=2\pi a$  «лучом» равно  $\tau=L/v_\phi$ , то разность фаз за счет разности хода «лучей», распространяющихся по направлению вращения резонатора и против этого направления

$$\Delta\phi = \Delta\omega\tau = v_N 8\pi S \Omega / \lambda_0 v_\phi, \quad S = \pi a^2,$$

что отличается от (1) коэффициентом  $v_N > 1$ , который определяется приближенно.

**Выводы.** Поставленные граничные задачи о возможности существования ЭМ-полей электрических и магнитных колебаний впервые решены строго на основе электродинамики общей теории относительности. Показано, что в ЭМ-поле вращающегося резонатора не существует «вихревых эффектов» или изменений частоты ЭМ-поля; вращение приводит к проявлению (возникновению) новых резонансных частот, сдвинутых на частоту вращения относительно друг друга. Это явление - эффект проявления собственных частот вещества во вращающемся резонаторе под влиянием гравитационного поля - подобно явлениям Штарка и Зеемана; для измерения частоты вращения возможно применение по конструктивным соображениям ЭМ-поля диапазона радиочастот.

Электромагнитные колебания во вращающемся коаксиальном резонаторе

**Постановка граничной задачи.** Введем в свободное пространство инерциальную (декартову) систему отсчета  $K'(x', y', z', ict) = K'(r', \varphi', z', ict) = K'(x^j)$ , где  $i$  - мнимая единица,  $t$  - время;  $x^j = (x^1, x^2, x^3, x^0)$ ,  $x^\alpha = (r', \varphi', z')$  - цилиндрические координаты ( $\alpha = 1, 2, 3$ ), и покоящуюся в ней точку наблюдения  $P'(x^\alpha, ict)$ . Внутри металлической цилиндрической трубы радиуса  $a$ , длины  $l$  расположен коаксиально металлический цилиндр радиуса  $b$ , длины  $l$ . Ось  $z'$  направлена вдоль осей коаксиальных цилиндров. В поперечных сечениях при  $z'=0$  и  $z'=l$  расположены металлические плоские торцы. Коаксиальные цилиндры с торцами вращаются относительно точки  $P'$  с постоянной угловой частотой  $\Omega = 2\pi F$ .

Введем жесткую вращающуюся систему отсчета  $K(r, \varphi, z, t) = K(x^\alpha, t)$  с осью  $z$ , направленной вдоль осей цилиндров. Тогда ось  $z = z'$  является осью вращения. Обозначим через  $P(r^\alpha, t)$ ,

где  $r^\alpha = r^\alpha(r, \varphi, z)$ , покоящуюся в системе отсчета  $K$  точку наблюдения ЭМ-поля.

Пространство между коаксиальными цилиндрами заполнено изотропной однородной линейной средой без джоулевых потерь и гистерезиса с диэлектрической  $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon'$  и магнитной  $\mu = \mu_0 \mu'$  проницаемостями, где  $\epsilon_0$  и  $\mu_0$  - электрическая и магнитная постоянные.

Если  $x^\alpha = x^\alpha(r, \varphi, z)$  - цилиндрические координаты, то  $r' = r, \varphi' = \varphi + \Omega t, z' = z$ . Параметры  $\epsilon, \mu, a, b$  считаем измеренными в системе отсчета  $K$ . Полагаем, что область сторонних источников, возбуждающих ЭМ-поле на частоте  $\omega_0$  (длина волны  $\lambda_0$ ), измеренной во времени  $t$ , выведена из объема, образованного коаксиальными цилиндрами и торцами (объема резонатора). Тогда необходимо рассмотреть возможность существования ЭМ-поля в объеме вращающегося резонатора.

Уравнения Максвелла в резонаторе в системе отсчета  $K$  однородны и могут быть записаны в соответствии с [Петров Б.М. Прикладная электродинамика вращающихся тел. - М.: Горячая линия - Телеком, 2009. - 288 с/] в трехмерной форме для ковариантного

вектора напряженности электрического поля  $E_\alpha=(E_1,E_2,E_3)=E$ , для контравариантной векторной плотности веса +1 - напряженности магнитного поля

$$5 \quad \hat{H}^{\alpha\beta} = \left( \hat{H}^{23}, -\hat{H}^{13}, \hat{H}^{12} \right) = \hat{H}, \text{ для контравариантной плотности веса +1 - электрической}$$

индукции  $\hat{D}^\alpha = \left( \hat{D}^1, \hat{D}^2, \hat{D}^3 \right) = \hat{D}$ , для ковариантного бивектора магнитной индукции

$$10 \quad B_{\alpha\beta}=(B_{23},-B_{13},B_{12})=B:$$

$$\text{rot} \hat{H} = \partial_t \hat{D}, \text{rot} E = -\partial_t B, \text{div} \hat{D} = 0, \text{div} B = 0. \quad (18)$$

ЭМ-поле в системе отсчета К, удовлетворяющее (18), с помощью электрического  $V^3$  и магнитного  $V^M$  потенциалов Дебая, являющихся

15 решениями волнового уравнения

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial V^{3,M}}{\partial r} + \frac{1-\beta^2}{r^2} \frac{\partial^2 V^{3,M}}{\partial \varphi^2} + \frac{2\beta}{v_\phi r} \frac{\partial^2 V^{3,M}}{\partial \varphi \partial t} + \frac{\partial^2 V^{3,M}}{\partial z^2} - \frac{1}{v_\phi^2} \frac{\partial^2 V^{3,M}}{\partial t^2} = 0, \quad (19)$$

20 где  $v_\phi = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$ ,  $\beta=\Omega r/v_\phi$ , разделяется на ЭМ-поле волн электрического типа (E-волн), когда продольная компонента бивектора магнитной индукции  $B_{r\varphi}=r^{-1}B_{12}, B_{12}=0$ ,

и на ЭМ-поле волн магнитного типа (H-волн), когда продольная компонента векторной

25 плотности электрической индукции  $\hat{D}^z = r^{-1} \hat{D}^3 = 0$ . При этом для E-волн, если обозначить  $W = \sqrt{\mu/\epsilon}$ , то

$$D_z = -\epsilon \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V^3}{\partial r} \right) - \frac{\epsilon}{r^2} \frac{\partial^2 V^3}{\partial \varphi^2}; \quad H_r^3 = \frac{\epsilon}{r} \frac{\partial^2 V^3}{\partial t \partial \varphi} + W^{-1} \frac{\partial}{\partial r} \left( \beta \frac{\partial V^3}{\partial r} \right);$$

$$30 \quad E_r^3 \frac{\partial^2 V^3}{\partial t \partial \varphi}; \quad E_z^3 = \frac{1-\beta^2}{\epsilon} \hat{D}^z - W \beta H_r^3; \quad (20)$$

$$35 \quad E_\varphi^3 = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 V^3}{\partial \varphi \partial z}; \quad H_\varphi^3 = -\epsilon \frac{\partial^2 V^3}{\partial t \partial z} + \frac{\beta}{r} W^{-1} \frac{\partial^2 V^3}{\partial \varphi \partial r}; \quad H_z^3 = W^{-1} \beta E_r^3.$$

В математической модели считаем проводимость стенок цилиндров и торцов идеальной. Тогда на поверхностях цилиндров и на торцах для ЭМ-поля E-волн должны выполняться граничные условия

$$40 \quad E_z^3 = 0 \text{ при } r = a \text{ и при } r = b; \partial E_z^3 / \partial z = 0 \text{ при } z = 0 \text{ и при } z = l. \quad (21)$$

Таким образом, для ЭМ-поля E-колебаний необходимо найти решение уравнений (18) при граничных условиях (21).

45 Решение задачи для ЭМ-поля E-колебаний. Потенциал Дебая  $V^3$ , являющийся решением уравнения (19), полученного из уравнений Максвелла (18), представляется при  $z \geq 0$  линейной комбинацией элементарных цилиндрических волн

$$V^3(P) = e^{i\omega_0 t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^3 Z_n(\chi r) e^{-in\varphi} e^{-i\chi_n z}, \quad (22)$$

где  $a_n^3$  - коэффициенты,  $\chi_n = \sqrt{k_n^2 - \chi^2}$ ,  $k_n = \omega_n / v_\Phi$ ,  $\omega_n = \omega_0 + n\Omega$ ;  $v_\Phi = c / \sqrt{\epsilon'\mu}$ ;  $Z_n(\chi r)$  - цилиндрическая функция аргумента  $\chi r$ , порядка  $n$ . Так как ЭМ-поле ищется в полости при  $b \leq r \leq a$ , то начало координат из рассмотрения исключается, поскольку ЭМ-поле в проводнике идеальной проводимости отсутствует. Тогда при  $b \leq r \leq a$ ,  $z \geq 0$  по (22) имеем

$$V^3(P) = e^{i\omega_0 t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [a_n^3 J_n(\chi r) + b^3 N_n(\chi r)] e^{-in\varphi} e^{-i\chi_n z}, \quad (23)$$

где  $a^3, b^3$  - коэффициенты,  $J_n(\chi r)$  и  $N_n(\chi r)$  - функции Бесселя и Неймана.

Для того чтобы выразить составляющую  $E_z^3$  в (20), подставим значения  $D_z$  и  $H_r^3$  в общее выражение  $E_z^3$ . Используя волновое уравнение (19) для потенциала  $V^3$ , получаем

$$E_z(P) = e^{i\omega_0 t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (k_0 k_n - \chi_n^2) [a_n^3 J_n(\chi r) + b^3 N_n(\chi r)] e^{-in\varphi} e^{-i\chi_n z}.$$

Из первого граничного условия (21) при  $r=a$  имеем, оставляя множители, зависящие от  $a$ ,  $a_n^3 J_n(\chi a) = 0$ . Из второго граничного условия (21) при  $r=b$  имеем, оставляя множители, зависящие от  $b$ ,  $a^3 J_n(\chi b) + b^3 N_n(\chi b) = 0$ . Чтобы ЭМ-поле существовало в полости (отличалось от нуля), необходимо, чтобы в системе двух последних уравнений коэффициенты  $a_n^3, b_n^3$  не равнялись нулю. Они не равны нулю только, если определитель из функций Бесселя и Неймана равен нулю, т.е.

$$J_n(\chi a) N_n(\chi b) - J_n(\chi b) N_n(\chi a) = 0.$$

Корни  $\sigma_{nm}^3$  этого дисперсионного уравнения определяют поперечные коэффициенты распространения  $k_{\perp nm}^3$  азимутальных гармоник ЭМ-поля. Обозначим  $a = \zeta b$ , где  $\zeta > 1$ . Тогда имеем

$$\frac{J_n(\chi b)}{N_n(\chi b)} = \frac{J_n(\zeta \chi b)}{N_n(\zeta \chi b)}.$$

Корнями этого уравнения, например, при  $\zeta = 1, 2$  являются значения  $\sigma_{00}^3 = 0$ ,

$\sigma_{01}^3 = 15,7$ ,  $\sigma_{02}^3 = 31,41$ ,  $\sigma_{03}^3 = 47,12$ ,  $\sigma_{04}^3 = 62,8$  и т.д.; при  $n=1$  корнями являются числа

$\sigma_{10}^3 = 0$ ,  $\sigma_{11}^3 = 15,73$ ,  $\sigma_{12}^3 = 31,43$ ,  $\sigma_{13}^3 = 47,13$ ,  $\sigma_{14}^3 = 62,84$  и т.д. [Янке Е., Эмде Ф.,

Леш Ф. Специальные функции. Изд. 2-е. - М.: Наука. 1968. - 344 с/]. Если использовать асимптотические выражения цилиндрических функций в этом уравнении при  $\chi b \gg |\ln|$ , то получим значения корней

$$\sigma_{nm}^3 \approx \frac{m\pi}{(\zeta - 1)}, m = 1, 2, 3, \dots \quad (24)$$

Эти значения мало отличаются от строгого решения уравнения.

Таким образом,  $\sigma_{nm}^3$ , по крайней мере, при малых  $n$  и  $m$  можно вычислять по (24).

При этом поперечный коэффициент распространения  $k_{\perp nm}^3 = \sigma_{nm}^3 / b \approx m\pi / (\zeta - 1)b$

почти не зависит от номера азимутальной гармоники. При  $m=0$  необходимы

дополнительные исследования, так как при  $\sigma_{00}^3 \rightarrow 0$   $N_0(\sigma_{00}^3 b) \rightarrow -\infty$

Решение уравнения (19), удовлетворяющее граничным условиям при  $r=b$  и  $r=a$ , в

соответствии с (23) теперь можно представить в виде

$$V^3(P) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_{nm}^3(P),$$

где

$$V_{nm}^3(P) = e^{i\omega_0 t} [a_{nm}^3 J_n(k_{\perp nm}^3 r) + b_{nm}^3 N_n(k_{\perp nm}^3 r)] e^{-in\varphi} Z_{nm}^3(z) \quad (25)$$

пространственная гармоника потенциала Дебая, а  $Z_{nm}^3(z)$  - искомая функция такая, что  $V_{nm}^3(P)$  должна удовлетворять волновому уравнению и граничным условиям при  $z=0$  и  $z=1$ .

Для определения функции  $Z_{nm}^3(z)$  подставим (25) в (19) и учтем, что  $V_{nm}^3$  удовлетворяет уравнению Бесселя. Получаем

$$\frac{\partial^2 V_{nm}^3}{\partial z^2} + \eta_{nm}^2 V_{nm}^3 = 0,$$

$$\text{где } \eta_{nm}^3 = k_n^2 - (k_{\perp nm}^3)^2.$$

Подставим в это выражение значение  $V_{nm}^3$  из (25). Сокращая множители, не зависящие от  $z$ , имеем обыкновенное дифференциальное уравнение для искомой функции

$Z_{nm}^3(z)$ :

$$\frac{\partial^2 Z_{nm}^3(z)}{\partial z^2} + \eta_{nm}^2 Z_{nm}^3(z) = 0,$$

общим решением которого является

$$Z_{nm}^3(z) = g_{nm} e^{-i\eta_{nm} z} + g'_{nm} e^{i\eta_{nm} z},$$

где  $g_{nm}$ ,  $g'_{nm}$  - амплитуды бегущих волн.

Сформулируем граничные условия для функции  $Z_{nm}^3$

Пространственная гармоника продольной составляющей  $E_{z, nm}^3$  с помощью (19) и (20) выражается через  $V_{nm}^3$  следующим образом

$$E_{z, nm}^3(P) = (k_0 k_n - \eta_{nm}^2) V_{nm}^3(P),$$

поэтому граничное условие на торцах выполняется, если

$$\frac{\partial V_{nm}^3(r, \varphi, z, t)}{\partial z} = 0 \text{ при } z=0 \text{ и } z=1.$$

Значит, функция  $Z_{nm}^3(z)$  должна удовлетворять граничным условиям  $\frac{\partial Z_{nm}^3(z)}{\partial z} = 0$

при  $z=0$ ,  $z=1$ . Поэтому

$$Z_{nmq}^3(z) = 2g_{nm} \cos \frac{q\pi}{1} z, \quad q = 0, 1, 2, \dots$$

Таким образом, пространственной азимутальной гармоникой потенциала Дебая для ЭМ-поля колебаний электрического типа является

$$V_{nmq}^3(P) = e^{i\omega_0 t} [a_{nmq}^3 J_n(k_{\perp nm}^3 r) + b_{nmq}^3 N_n(k_{\perp nm}^3 r)] e^{-in\varphi} \cos \frac{q\pi}{1} z,$$

где  $a_{nmq}^3 = 2g_{nmq} \cdot a_{nm}^3$ ,  $b_{nmq}^3 = 2g_{nmq} \cdot b_{nm}^3$  - коэффициенты.

Решением граничной задачи по определению ЭМ-поля Е-колебаний вращающегося резонатора является потенциал Дебая

$$V^3(P) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} V_{nmq}^3(P) \quad (26)$$

совместно с выражениями (20).

Собственные частоты  $E_{nmq}$ -колебаний. Подставим (26) в волновое уравнение (29), выполняя дифференциальные операции, получаем

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \left[ k_n^2 - (k_{\perp nm}^3)^2 - \left( \frac{q\pi}{1} \right)^2 \right] V_{nmq}^3(P) = 0.$$

Для существования ЭМ-поля в резонаторе необходимо, чтобы выражение в квадратных скобках равнялось нулю ( $V_{nmq}^3 \neq 0$ ). При этом

$$(k_n)_{рез, nmq}^2 = (k_{\perp nm}^3)^2 + \left( \frac{q\pi}{1} \right)^2,$$

т.е.

$$\omega_{0, рез, nmq}^3 = v_{\phi} \sqrt{(k_{\perp nm}^3)^2 + \left( \frac{q\pi}{1} \right)^2} - n\Omega. \quad (27)$$

Рассмотрим первый случай, когда задана частота вращения  $\Omega$ . Тогда для пространственных гармоник, распространяющихся в направлении увеличения координаты  $\varphi$  (в положительном направлении), для ЭМ-поля  $E_{|n|mq}$ -колебаний, резонансной (собственной) частотой является

$$\omega_{0, рез, |n|mq}^{+3} = \omega_{0, nmq} - |n| \Omega,$$

где  $\omega_{0, nmq} = v_{\phi} \sqrt{(k_{\perp nm}^3)^2 + (q\pi/1)^2}$  - собственная частота «неподвижного» резонатора.

Для пространственных гармоник, распространяющихся в противоположном направлении (в отрицательном направлении), т.е. для поля  $E_{-|n|mq}$  - колебаний, резонансной (собственной) частотой является

$$\omega_{0, рез, -|n|mq}^{-3} = \omega_{0, nmq} + |n| \Omega.$$

Таким образом, разность резонансных частот  $E_{-|n|mq}$  - и  $E_{|n|mq}$ - колебаний («расщепление» частот)

$$\Delta\omega_{рез, nmq}^3 = 2|n|\Omega. \quad (28)$$

В этом выражении  $n$  определяет тип колебания «неподвижного» резонатора. Если применить для измерения частоты вращения  $E_{0mq}$ -колебания, то  $n=0$  и расщепление частот не происходит:  $\Delta\omega_{рез, 0mq}^3 = 0$ . Значит, на основном или  $E_{010}$ -, или  $T_1$ -колебании «неподвижного» коаксиального резонатора измерения частоты вращения произвести невозможно. Учитывая асимптотические свойства цилиндрических функций в (26), получаем, что при  $k_0 b \gg 1$  и малых  $q$  в многомодовом режиме минимальное значение

$|n|_{мин} = v_N k_0 b$ , максимальное значение  $|n|_{макс} = v'_N k_0 a$ , где коэффициенты  $v_N > 1$ ,  $v'_N > 1$

определены в [Петров Б.М. Прикладная электродинамика вращающихся тел. - М.: Горячая линия - Телеком, 2009. - 288 с.]. Тогда расщепление частот по (28)

$$\Delta\omega_{\text{рез, nmq}} = 2k_0 (v'_N a - v_N b) \frac{4\pi}{\lambda_0} \Omega,$$

что при  $b=0$  и только при  $v'_N = 1$  совпадает с выражением (1).

Таким образом, во вращающемся коаксиальном резонаторе могут существовать  $E_{-|n|mq}$ - и  $E_{|n|mq}$ -колебания, им соответствуют две собственные частоты, зависящие как и в «неподвижном» резонаторе, от электродинамических параметров заполняющего резонатор вещества, электрических размеров и частоты вращения резонатора. Во вращающемся резонаторе происходит «расщепление» собственных частот.

Рассмотрим второй случай, соответствующий измерению частот  $\omega_{0, \text{рез}, |n|mq}^{+3}$  и

$\omega_{0, \text{рез}, -|n|mq}^{-3}$ . При этом для  $E_{|n|mq}$ -колебаний с положительным индексом резонансная частота вращения в соответствии с (27)

$$\Omega_{\text{рез}}^{+3} = (\omega_{0, \text{nmq}} - \omega_{0, \text{рез}, |n|mq}^{+3}) / n,$$

а для  $E_{-|n|mq}$ -колебаний с отрицательным индексом резонансная частота вращения

$$\Omega_{\text{рез}}^{-3} = (\omega_{0, \text{рез}, -|n|mq}^{-3} - \omega_{0, \text{nmq}}) / n.$$

#### Выводы

Таким образом, строгая постановка и решение граничных, задач о возможности существования ЭМ-поля во вращающейся полости показывают, что каждая из собственных (резонансных) частот ее определяется суммой собственной частоты «покоящейся» полости и частоты вращения, умноженной на целое число, зависящее от типа ЭМ-колебания. Поэтому измерить частоту вращения полости можно как разность между частотой вращения и резонансной частотой «покоящейся» полости на заданном типе ЭМ-колебания; эта разность делится на зависящее от заданного типа ЭМ-колебания целое число.

Техническим результатом заявляемого резонансного способа измерения частоты вращения объекта является возможность миниатюризации линейных размеров вращающейся полости с одновременным увеличением точности измерения частоты вращения за счет использования разных резонансных свойств ЭМ-поля в одной и той же вращающейся и «покоящейся» полости.

Заявляемый способ дает возможность использовать одномодовый режим и, значит, выбрать собственную частоту из частот радиодиапазона. При этом точность измерения частоты вращения определяется хорошо разработанными радиотехническими методами измерения частоты, а способ измерения является прямым.

Способ измерения частоты вращения полости, основанный на «оптическом вихревом эффекте Саньяка», т.е. приближенной формуле (1) или на приближенной формуле (1а), не учитывает физических явлений во вращающейся полости, является принципиально приближенным, так как измеряется разность фаз, а не частота вращения, поэтому он является косвенным.

По заявляемому резонансному способу измерения частоты вращения геометрические размеры полости на заданном типе ЭМ-колебания могут не превышать значения длины волны источника ЭМ-поля. Например, при шаровой форме резонатора в случае выбора основного колебания ( $E_{111}$ -колебания) собственная частота «покоящегося» резонатора

$\omega_{0,011}^{3,рез} = 2,75v_{\phi} / a = 2,75c / \sqrt{\epsilon'\mu'}a$ , а собственная частота вращающегося резонатора

$$\omega_{0,111}^{3,рез} = \omega_{0,011}^{3,рез} \mp \Omega.$$

5 Тогда радиус резонатора  $a = 2,75c / \sqrt{\epsilon'\mu'}\omega_{0,111}^{3,рез}$ .

На частоте  $f_{0,011}^{3,рез} = 10$  ГГц (трехсантиметровый диапазон длин волн)  $a = 1,31$  см при  $\epsilon' = \mu' = 1$ .

10 Применением магнитодиэлектрика ( $\epsilon' > 1$  или  $\mu > 1$ ), заполняющего резонатор, можно уменьшить радиус резонатора.

Таким образом, выбором частоты «неподвижного» резонатора и параметров магнитодиэлектрика можно выполнить миниатюризацию резонатора.

15 При применении формулы (1) для лазера с  $\lambda_0 = 436 \cdot 10^{-9}$  м и радиусе резонатора  $a = 1,31$  см ( $\epsilon' = \mu' = 1$ ) получаем разность фаз  $\Delta\Phi = 1,03 \cdot 10^{-4}$  рад, которую измерить трудно при любой частоте вращения.

Таким образом, способ измерения частоты вращения, основанный на «оптическом вихревом эффекте Саньяка», предполагающий обязательное применение длин волн оптического диапазона и многоволновый режим вращающейся полости, не позволяет

20 выполнить миниатюризацию полости и повысить точность измерения частоты вращения. Во вращающейся полости при монохроматическом источнике ЭМ-поля дискретная спектральная структура ЭМ-поля отсутствует, поэтому достичь основного технического результата - измерения частоты вращения полости радиолокационным способом нельзя.

25 Заявляемый способ поясняется следующим образом: для измерения частоты вращения полости надо измерить только резонансную частоту вращения вращающейся полости, так как резонансная частота «покоящейся» полости задана при расчете резонатора. Затем надо вычислить разность между измеренной резонансной частотой вращения и резонансной частотой «покоя» и разделить ее (разность) на постоянное целое число, определяемое заданным типом ЭМ-колебания.

30 Для достижения технического результата в резонансном способе измерения частоты вращения объекта измеряемую частоту вращения определяют как разность между собственной частотой вращения полости на выбранном типе электромагнитного колебания и собственной частотой «неподвижной» полости на том же типе колебания, деленную на постоянное число, определяемое выбранным при расчете полости типом колебания, а направление вращения определяют знаком этой разности.

35 Для достижения технического результата устройство, реализующее резонансный способ измерения частоты вращения объекта, содержит монохроматический автогенератор перестраиваемой частоты, зонд-возбудитель, детектор электромагнитного поля, устройство перестройки частоты автогенератора, частотомер и решающее

40 устройство, которое вычисляет частоту вращения как разность между резонансной частотой вращения полости и резонансной частотой «неподвижной» полости, деленную на постоянное число, определяемое выбранным при расчете полости типом электромагнитного колебания, а направление вращения определяется знаком этой разности.

45 Резонансный способ измерения частоты вращения объекта реализует предлагаемое устройство, заявляемое в качестве изобретения. Устройство поясняется фигурой 1, где:

1 - резонатор;

2 - автогенератор монохроматического ЭМ-поля;

3 - устройство перестройки частоты автогенератора;

- 4 - зонд-возбудитель ЭМ-поля;
- 5 - детектор ЭМ-поля;
- 6 - решающее устройство;
- 7 - частотомер.

5 Рассмотрим работу устройства, реализующего резонансный способ определения частоты вращения объекта. В состоянии «покоя» ( $\Omega=0$ ) резонатора автогенератор (2) возбуждает ЭМ-поле в резонаторе (1) с помощью электрического или магнитного зондов, или дифракционной связи (4). Если частота  $\omega_0$  автогенератора (2) отличается от резонансной частоты «покоя» полости (1), то с детектора ЭМ-поля (5) на решающее устройство (6) поступает напряжение, близкое к нулевому, что является информацией об отсутствии резонанса. Решающее устройство (6) подает сигнал на устройство перестройки частоты (3) автогенератора (2), которое перестраивает частоту автогенератора до тех пор, пока показания детектора ЭМ-поля (5) не станут максимальными, что указывает на наличие резонанса. Частота автогенератора 10 измеряется частотомером (7) и записывается в решающем устройстве (6).

При вращении полости (1) резонансная частота вращения отличается от резонансной частоты «покоя» полости, поэтому резонанс ЭМ-поля отсутствует, на детекторе (5) напряжение становится близким к нулю. На решающее устройство (6) поступает сигнал об отсутствии резонанса. Решающее устройство (6) подает сигнал на устройство 20 перестройки частоты (3) автогенератора (2), которое перестраивает частоту автогенератора до тех пор, пока показания ЭМ-поля (5) не станут максимальными. При этом частота автогенератора (2) измеряется частотомером (7) и записывается в решающее устройство (6). В решающем устройстве (6) вычисляется разность между записанными частотой «покоя» полости и частотой вращения. Разность делится на 25 целое положительное число, определяемое выбранным при расчете полости типом ЭМ-колебания.

Таким образом, применение заявляемого способа измерения частоты вращения объекта и устройства, реализующее этот способ, значительно улучшает точность и весогабаритные характеристики гироскопических приборов, что позволяет создать 30 миниатюрные индикаторы углового движения на летательных аппаратах, надводных и подводных объектах.

#### Формула изобретения

1. Резонансный способ измерения частоты вращения объекта, отличающийся тем, 35 что измеряемую частоту вращения определяют как разность между собственной частотой вращения полости на выбранном типе электромагнитного колебания и собственной частотой «неподвижной» полости на том же типе колебания, деленную на постоянное число, определяемое выбранным при расчете полости типом колебания, а направление вращения определяют знаком этой разности.

40 2. Устройство, реализующее резонансный способ измерения частоты вращения объекта, отличающееся тем, что оно содержит монохроматический автогенератор перестраиваемой частоты, зонд-возбудитель, детектор электромагнитного поля, устройство перестройки частоты автогенератора, частотомер и решающее устройство, которое вычисляет частоту вращения как разность между резонансной частотой 45 вращения полости и резонансной частотой «неподвижной» полости, деленную на постоянное число, определяемое выбранным при расчете полости типом электромагнитного колебания, а направление вращения определяется знаком этой разности.