



(12) 发明专利

(10) 授权公告号 CN 113641193 B

(45) 授权公告日 2023. 04. 04

(21) 申请号 202110960579.6

(56) 对比文件

(22) 申请日 2021.08.20

CN 112445131 A, 2021.03.05

(65) 同一申请的已公布的文献号  
申请公布号 CN 113641193 A

审查员 赵珊珊

(43) 申请公布日 2021.11.12

(73) 专利权人 电子科技大学  
地址 611731 四川省成都市高新区(西区)  
西源大道2006号

(72) 发明人 施孟佶 李维豪 祝洋 陈博文  
杜文涛 林伯先 秦开宇

(74) 专利代理机构 成都虹盛汇泉专利代理有限  
公司 51268

专利代理师 王伟

(51) Int. Cl.

G05D 1/12 (2006.01)

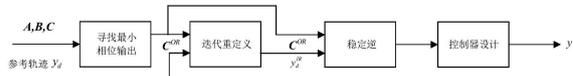
权利要求书3页 说明书8页 附图1页

(54) 发明名称

一种非最小相位系统精确跟踪控制方法

(57) 摘要

本发明公开了一种非最小相位系统精确跟踪控制方法,包括如下步骤:S1、建立非最小相位系统线性模型,基于输出重定义技术求解最小相位输出建立最小相位系统;S2、针对最小相位系统,以原始非最小相位系统的参考轨迹为基础,设计迭代解算方案,求解最小相位系统的参考轨迹;S3、利用S2中迭代求解的最小相位系统的参考轨迹,设计基于“反馈+前馈”结构的控制器。本发明在寻找到最小相位输出的基础上,通过迭代算法,利用稳定逆方法精确求解最小相位系统的参考轨迹,为控制系统设计提供先验信息,而后再设计“反馈+前馈”的控制结构,有效解决非最小相位系统现有输出重定义方法存在的近似精度不足问题,改善了此类系统的输出跟踪性能。



1. 一种非最小相位系统精确跟踪控制方法,其特征在于,包括如下步骤:

S1、建立系统的非最小相位系统线性模型,而后基于输出重定义技术求解最小相位输出,建立最小相位系统;包括以下子步骤:

S11、建立单输入单输出的非最小相位系统模型如下:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases} \quad (1)$$

其中,系统状态  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\dot{\mathbf{x}}$  表示  $\mathbf{x}$  的一阶导数;控制输入  $u \in \mathbb{R}$ , 系统输出  $y \in \mathbb{R}$ , 且  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ ,  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ ;  $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{C}$  分别是系统的状态矩阵、输入矩阵和输出矩阵;  $\mathbb{R}$ 、 $\mathbb{R}^{n \times n}$ 、 $\mathbb{R}^{1 \times n}$  分别表示一维、 $n \times n$  维、 $1 \times n$  维的空间,  $n$  为系统阶数;

S12、计算非最小相位系统模型的输出相对阶:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}\mathbf{A}^i\mathbf{B} &= 0, \quad 0 \leq i < r-1 \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{r-1}\mathbf{B} &\neq 0, \quad r \leq n \end{aligned} \quad (2)$$

其中,  $r$  为系统的输出相对阶;

S13、设S12中所计算的相对阶  $r < n$ , 设计非奇异转换矩阵  $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times n}$  将S11中的系统状态分解为:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \boldsymbol{\eta} \end{bmatrix} = \Phi \mathbf{x} \quad (3)$$

其中,  $\mathbf{z} = [z_1, z_2, \dots, z_r]^T \in \mathbb{R}^{r \times 1}$  代表外部状态, 其与系统的控制输入密切相关,  $\boldsymbol{\eta} = [\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r}]^T \in \mathbb{R}^{(n-r) \times 1}$  代表系统内部状态, 其不受系统控制输入的影响;

S14、根据步骤S13中的转换关系, 写出S11中系统的一般形式为:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_{r-1} = z_r \\ \dot{z}_r = \mathbf{C}\mathbf{A}^r\Phi^{-1}[\mathbf{z} \quad \boldsymbol{\eta}]^T + \mathbf{C}\mathbf{A}^{r-1}\mathbf{B}u \\ \dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{P}\boldsymbol{\eta} + \mathbf{Q}\mathbf{z} \end{cases} \quad (4)$$

其中,  $\dot{z}_1, \dots, \dot{z}_r$  分别代表外部状态  $z_1, \dots, z_r$  的一阶导数; 第一个状态  $z_1$  等价于S11中系统的输出  $y$ , 其也是系统 (4) 的输出; 矩阵  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)}$  和  $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{(n-r) \times r}$  分别是内部动态的系统矩阵和输入矩阵,  $\dot{\boldsymbol{\eta}}$  表示系统内部状态  $\boldsymbol{\eta}$  的一阶导数;

S15、基于S14中得到的一般形式的系统模型, 以及S13中的转换关系, 构造转换矩阵  $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times n}$  为:

$$\Phi = [\mathbf{C} \quad \mathbf{C}\mathbf{A} \quad \dots \quad \mathbf{C}\mathbf{A}^{r-1} \quad \alpha_1 \quad \dots \quad \alpha_i \quad \dots \quad \alpha_{n-r}]^T$$

其中,  $0 \leq i \leq n-r$  且  $\alpha_i$  是在保证矩阵  $\Phi$  为非奇异的情况下, 通过求解方程  $\alpha_i \mathbf{B} = 0$  所得;

S16、在S14系统模型, 设置输出  $y = z_1$  恒为0, 求解系统 (4) 的零动态为

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{P}\boldsymbol{\eta} \quad (5)$$

(5) 描述了系统内部动力学特性, 如果 (5) 中的矩阵  $\mathbf{P}$  有至少一个特征值位于频域左半

平面,即 $\lambda(P) > 0$ ,则称S14中的系统(4)为非最小相位系统;

S17、在S14-S16的基础上,判定系统是否为非最小相位系统,进而定义基于输出重定义后得到的系统输出矩阵为 $C^{OR} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ ,由此建立最小相位系统为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ y^{OR} = \mathbf{C}^{OR}\mathbf{x} \end{cases} \quad (6)$$

其中, $y^{OR} \in \mathbb{R}$ 是重定义后的系统输出,此输出能够确保系统(6)为最小相位系统;为方便记录,在其余地方上标“OR”均代表实施输出重定义后的变量;

S18、通过求解下列两条件中的相关方程,使 $y^{OR}$ 为最小相位输出:

条件1:存在一个状态反馈变量 $\mathbf{K}_c \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ ,使得矩阵 $(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_c)$ 有 $n-r$ 个特征值位于频域的左半平面;

条件2:重定义后的输出矩阵 $C^{OR}$ 满足如下条件

$$\begin{cases} \mathbf{C}^{OR}\mathbf{A}^{r-1}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_c) = 0 \\ \mathbf{C}^{OR}\mathbf{A}^i\mathbf{B} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, r-2 \\ \mathbf{C}^{OR}\mathbf{A}^{r-1}\mathbf{B} \neq 0 \end{cases} \quad (7);$$

S19、定义从候选池中选择的最小相位输出矩阵为 $C_{opt}^{OR}$ ,其满足:

$$\mathbf{C}_{opt}^{OR} = \min \{ \|\mathbf{C} - \mathbf{C}_i^{OR}\|_2 \mid i \in \{1, 2, \dots, n^{OR}\} \} \quad (8)$$

其中, $n^{OR}$ 是通过条件1,2求解得到的最小相位输出 $C^{OR}$ 的个数, $n^{OR} \geq 1$ ;  $\|\cdot\|_2$ 表示欧氏距离;

S2、针对S1中建立的最小相位系统,以原始非最小相位系统的参考轨迹为基础,设计迭代解算方案,求解最小相位系统的参考轨迹;采用迭代求解算法求解输出重定义后最小相位系统的真实参考轨迹,其具体流程为:

A、选择迭代初值 $y_0^{IR} = y_d$ ,  $y_d$ 为原始非最小相位系统的参考轨迹;令最小相位输出 $\mathbf{C}^{IR} = \mathbf{C}_i^{OR}$ ,其中 $i \in \{1, 2, \dots, n^{OR}\}$ ,且令当前迭代周期 $j=0$ ;

B、若 $j < N$ ,基于非奇异转换矩阵 $\Phi^{IR}$ 和稳定逆计算方法,计算系统此迭代周期的状态参考和控制输入参考分别为:

$$\mathbf{x}_{jd}^{IR} = (\Phi^{IR})^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{jd}^{IR} \\ \boldsymbol{\eta}_{jd}^{IR} \end{bmatrix}$$

$$u_{jd}^{IR} = (\mathbf{C}^{IR}\mathbf{A}^{r-1}\mathbf{B})^{-1}(y_d^{(r)} - \mathbf{C}^{IR}\mathbf{A}^r(\Phi^{IR})^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{jd}^{IR} \\ \boldsymbol{\eta}_{jd}^{IR} \end{bmatrix}^T)$$

$\mathbf{z}_{jd}^{IR}$ 、 $\boldsymbol{\eta}_{jd}^{IR}$ 分别表示实施输出重定义后第 $j$ 次迭代的外部状态的参考和内部状态的参考;

而后,计算得到 $y_j^{IR} = \mathbf{C}\mathbf{x}_{jd}^{IR}$ ;并执行步骤C;

若 $j \geq N$ ,终止迭代,输出 $y_d^{IR} = y_j^{IR}$ ,结束操作;其中, $N$ 为最大迭代次数;

C、若 $\|y_j^{IR}(t) - y_d(t)\|_{\infty} \geq \varepsilon$ ,其中, $\varepsilon$ 为预设的阈值;令 $j = j+1$ ,计算下一个迭代周期的最小相位系统的参考轨迹:

$$y_j^{IR} = y_{j-1}^{IR} + k_a(y_d - y_{j-1}^{IR})$$

并返回步骤B,  $k_a$  为迭代增益; 否则终止迭代并输出  $y_d^{IR} = y_j^{IR}$ , 结束操作;

S3、利用S2中迭代求解的最小相位系统的参考轨迹, 设计基于“反馈+前馈”结构的控制器; 包括以下子步骤:

S31、根据步骤S2中的最小相位系统的参考轨迹, 对步骤S11中的系统(1)设计基于“反馈+前馈”结构的控制器如下:

$$u = u_d + K(x_d - x)$$

其中,  $K \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  是反馈增益矩阵,  $u_d$  和  $x_d$  分别是控制输入参考和状态参考; 前馈控制项  $u_d$  用于实现精确跟踪, 反馈控制项  $K(x_d - x)$  用于提高系统稳定性并修正与状态参考轨迹的偏差;

S32、依据极点配置定理, 确定反馈增益矩阵  $K$ 。

## 一种非最小相位系统精确跟踪控制方法

### 技术领域

[0001] 本发明针对工程中存在的非最小相位系统,涉及一种非最小相位系统精确跟踪控制方法。

### 背景技术

[0002] 非最小相位系统的一个突出特点是,系统中包含至少一个不稳定的零点。特别是,针对线性非最小相位系统,其至少有一个右半平面得零点。非最小相位特性在各种航空器中广泛存在,包括传统的固定翼飞机、垂直起降飞机、高超声速飞行器和自主直升机。由于非最小相位系统自身固有的不稳定的内部动力学的存在,其不能被典型的输出反馈控制器所稳定,设计一个合适的控制器是极具挑战性的,因此,经典的控制方法,如反步法、滑模控制和基于反馈的线性化控制,不能直接应用于非最小相位系统。一般来说,系统的非最小相位特性与系统输出的选取密切相关,因此可以通过选取不同的输出(即输出重定义),寻找一个近似最小相位系统,改善系统的内部动态特性,便于控制系统设计。然而,现有输出重定义的方法侧重于寻找最小相位输出,对重定义后原始非最小相位系统输出跟踪控制效果研究的较少。

### 发明内容

[0003] 本发明的目的在于克服现有技术的不足,提供一种在寻找到最小相位输出的基础上,通过迭代算法,利用稳定逆方法精确求解最小相位系统的参考轨迹,为控制系统设计提供先验信息,而后再设计“反馈+前馈”的控制结构,有效解决非最小相位系统现有输出重定义方法存在的近似精度不足问题,改善了系统的输出跟踪性能的非最小相位系统精确跟踪控制方法。

[0004] 本发明的目的是通过以下技术方案来实现的:一种非最小相位系统精确跟踪控制方法,包括如下步骤:

[0005] S1、建立系统的非最小相位系统线性模型,而后基于输出重定义技术求解最小相位输出,建立最小相位系统;

[0006] S2、针对S1中建立的最小相位系统,以原始非最小相位系统的参考轨迹为基础,设计迭代解算方案,求解最小相位系统的参考轨迹;

[0007] S3、利用S2中迭代求解的最小相位系统的参考轨迹,设计基于“反馈+前馈”结构的控制器。

[0008] 进一步地,所述步骤S1包括以下子步骤:

[0009] S11、建立单输入单输出的非最小相位系统模型如下:

$$[0010] \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} = \mathbf{Cx} \end{cases} \quad (1)$$

[0011] 其中,系统状态  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\dot{\mathbf{x}}$  表示  $\mathbf{x}$  的一阶导数;控制输入  $u \in \mathbb{R}$ , 系统输出  $y \in \mathbb{R}$ , 且

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ ; A、B、C分别是系统的状态矩阵、输入矩阵和输出矩阵;  
 $\mathbb{R}$ 、 $\mathbb{R}^{n \times n}$ 、 $\mathbb{R}^{1 \times n}$ 分别表示一维、 $n \times n$ 维、 $1 \times n$ 维的空间,  $n$ 为系统阶数;

[0012] S12、计算非最小相位系统模型的输出相对阶:

$$\begin{aligned} [0013] \quad & CA^i B = 0, \quad 0 \leq i < r-1 \\ & CA^{r-1} B \neq 0, \quad r \leq n \end{aligned} \quad (2)$$

[0014] 其中,  $r$ 为系统的输出相对阶;

[0015] S13、设S12中所计算的相对阶  $r < n$ , 设计非奇异转换矩阵  $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times n}$  将S11中的系统状态分解为:

$$[0016] \quad \begin{bmatrix} z \\ \eta \end{bmatrix} = \Phi x \quad (3)$$

[0017] 其中,  $z = [z_1, z_2, \dots, z_r]^T \in \mathbb{R}^{r \times 1}$  代表外部状态, 其与系统的控制输入密切相关,

[0018]  $\eta = [\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r}]^T \in \mathbb{R}^{(n-r) \times 1}$  代表系统内部状态, 其不受系统控制输入的影响;

[0019] S14、根据步骤S13中的转换关系, 写出S11中系统的一般形式为:

$$[0020] \quad \begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_{r-1} = z_r \\ \dot{z}_r = CA^r \Phi^{-1} [z \quad \eta]^T + CA^{r-1} B u \\ \dot{\eta} = P \eta + Q z \end{cases} \quad (4)$$

[0021] 其中,  $\dot{z}_1, \dots, \dot{z}_r$  分别代表外部状态  $z_1, \dots, z_r$  的一阶导数; 第一个状态  $z_1$  等价于S11中系统的输出  $y$ , 其也是系统 (4) 的输出; 矩阵  $P \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)}$  和  $Q \in \mathbb{R}^{(n-r) \times r}$  分别是内部动态的系统矩阵和输入矩阵,  $\dot{\eta}$  表示系统内部状态  $\eta$  得一阶导数;

[0022] S15、基于S14中得到的一般形式的系统模型, 以及S13中的转换关系, 构造转换矩阵  $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times n}$  为:

[0023]  $\Phi = [C \quad CA \quad \dots \quad CA^{r-1} \quad a_1 \quad \dots \quad a_i \quad \dots \quad a_{n-r}]^T$  其中,  $0 \leq i \leq n-r$  且  $a_i$  是在保证矩阵  $\Phi$  为非奇异的 (满秩的) 情况下, 通过求解方程  $a_i B = 0$  所得;

[0024] S16、在S14系统模型, 设置输出  $y = z_1$  恒为0, 求解系统 (4) 的零动态为

$$[0025] \quad \dot{\eta} = P \eta \quad (5)$$

[0026] (5) 描述了系统内部动力学特性, 如果 (5) 中的矩阵  $P$  有至少一个特征值位于频域左半平面, 即  $\lambda(P) > 0$ , 则称S14中的系统 (4) 为非最小相位系统;

[0027] S17、在S14-S16的基础上, 判定系统是否是非最小相位系统, 进而定义基于输出重定义后得到的系统输出矩阵为  $C^{OR} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ , 由此建立最小相位系统为

$$[0028] \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ \mathbf{y}^{OR} = \mathbf{C}^{OR}\mathbf{x} \end{cases} \quad (6)$$

[0029] 其中,  $\mathbf{y}^{OR} \in \mathbb{R}$  是重定义后的系统输出, 此输出能够确保系统 (6) 为最小相位系统; 为方便记录, 在其余地方上标“OR”均代表实施输出重定义后的变量;

[0030] S18、通过求解下列两条件中的相关方程, 使  $\mathbf{y}^{OR}$  为最小相位输出:

[0031] 条件1: 存在一个状态反馈变量  $\mathbf{K}_c \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ , 使得矩阵  $(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_c)$  有  $n-r$  个特征值位于频域的左半平面;

[0032] 条件2: 重定义后的输出矩阵  $\mathbf{C}^{OR}$  满足如下条件

$$[0033] \quad \begin{cases} \mathbf{C}^{OR} \mathbf{A}^{r-1} (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_c) = 0 \\ \mathbf{C}^{OR} \mathbf{A}^i \mathbf{B} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, r-2 \\ \mathbf{C}^{OR} \mathbf{A}^{r-1} \mathbf{B} \neq 0 \end{cases} \quad (7);$$

[0034] S19、定义从候选池中选择的最小相位输出矩阵为  $\mathbf{C}_{opt}^{OR}$ , 其满足:

$$[0035] \quad \mathbf{C}_{opt}^{OR} = \min \left\{ \|\mathbf{C} - \mathbf{C}_i^{OR}\|_2 \mid i \in \{1, 2, \dots, n^{OR}\} \right\} \quad (8)$$

[0036] 其中,  $n^{OR}$  是通过条件1, 2求解得到的最小相位输出  $\mathbf{C}^{OR}$  的个数,  $n^{OR} \geq 1$ ;  $\|\cdot\|_2$  表示欧氏距离。

[0037] 进一步地, 所述步骤S2采用迭代求解算法求解输出重定义后最小相位系统的真实参考轨迹, 其具体流程为:

[0038] A、选择迭代初值  $\mathbf{y}_0^{IR} = \mathbf{y}_d$ ,  $\mathbf{y}_d$  为原始非最小相位系统的参考轨迹; 令最小相位输出  $\mathbf{C}^{IR} = \mathbf{C}_i^{OR}$ , 其中  $i \in \{1, 2, \dots, n^{OR}\}$ , 且令当前迭代周期  $j=0$ ;

[0039] B、若  $j < N$ , 基于非奇异转换矩阵  $\Phi^{IR}$  和稳定逆计算方法, 计算系统此迭代周期的状态参考和控制输入参考分别为:

$$[0040] \quad \mathbf{x}_{jd}^{IR} = (\Phi^{IR})^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{jd}^{IR} \\ \boldsymbol{\eta}_{jd}^{IR} \end{bmatrix}$$

$$[0041] \quad \mathbf{u}_{jd}^{IR} = (\mathbf{C}^{IR} \mathbf{A}^{r-1} \mathbf{B})^{-1} (\mathbf{y}_d^{(r)} - \mathbf{C}^{IR} \mathbf{A}^r (\Phi^{IR})^{-1} [\mathbf{z}_{jd}^{IR} \quad \boldsymbol{\eta}_{jd}^{IR}]^T)$$

[0042]  $\mathbf{z}_{jd}^{IR}$ 、 $\boldsymbol{\eta}_{jd}^{IR}$  分别表示实施输出重定义后第  $j$  次迭代的外部状态的参考和内部状态的参考;

[0043] 而后, 计算得到  $\mathbf{y}_j^{IR} = \mathbf{C}\mathbf{x}_{jd}^{IR}$ ; 并执行步骤C;

[0044] 若  $j \geq N$ , 终止迭代, 输出  $\mathbf{y}_d^{IR} = \mathbf{y}_j^{IR}$ , 结束操作; 其中,  $N$  为最大迭代次数;

[0045] C、若  $\|\mathbf{y}_j^{IR}(t) - \mathbf{y}_d(t)\|_{\infty} \geq \varepsilon$ , 其中,  $\varepsilon$  为预设的阈值; 令  $j = j+1$ , 计算下一个迭代周期的最小相位系统的参考轨迹:

$$[0046] \quad y_j^{IR} = y_{j-1}^{IR} + k_a(y_d - y_{j-1}^{IR})$$

[0047] 并返回步骤B,  $k_a$  为迭代增益; 否则终止迭代并输出  $y_d^{IR} = y_j^{IR}$ , 结束操作。

[0048] 进一步地, 所述步骤S3包括以下子步骤:

[0049] S31、根据步骤S2中的最小相位系统的参考轨迹, 对步骤S11中的系统(1)设计基于“反馈+前馈”结构的控制器如下:

$$[0050] \quad u = u_d + K(x_d - x)$$

[0051] 其中,  $K \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  是反馈增益矩阵,  $u_d$  和  $x_d$  分别是控制输入参考和状态参考; 前馈控制项  $u_d$  用于实现精确跟踪, 反馈控制项  $K(x_d - x)$  用于提高系统稳定性并修正与状态参考轨迹的偏差; S32、依据极点配置定理, 确定反馈增益矩阵  $K$ 。

[0052] 本发明的有益效果是: 本发明针对现有非最小相位系统输出重定义方法的不足, 在寻找到最小相位输出的基础上, 通过迭代算法, 利用稳定逆方法精确求解最小相位系统的参考轨迹, 为控制系统设计提供先验信息, 而后再设计“反馈+前馈”的控制结构, 有效解决非最小相位系统现有输出重定义方法存在的近似精度不足问题, 改善了此类系统的输出跟踪性能。

## 附图说明

[0053] 图1为本发明的非最小相位系统精确跟踪控制方法的流程图;

[0054] 图2为本发明的非最小相位系统的迭代重定义方法流程图。

## 具体实施方式

[0055] 下面结合附图进一步说明本发明的技术方案。

[0056] 如图1所示, 本发明的一种非最小相位系统精确跟踪控制方法, 包括如下步骤:

[0057] S1、建立系统的非最小相位系统线性模型, 而后基于输出重定义技术求解最小相位输出, 建立最小相位系统;

[0058] 包括以下子步骤:

[0059] S11、建立单输入单输出的非最小相位系统模型如下:

$$[0060] \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases} \quad (1)$$

[0061] 其中, 系统状态  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\dot{\mathbf{x}}$  表示  $\mathbf{x}$  的一阶导数; 控制输入  $u \in \mathbb{R}$ , 系统输出  $y \in \mathbb{R}$ , 且  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ ,  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ ;  $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{C}$  分别是系统的状态矩阵、输入矩阵和输出矩阵;

$\mathbb{R}$ 、 $\mathbb{R}^{n \times n}$ 、 $\mathbb{R}^{1 \times n}$  分别表示一维、 $n \times n$  维、 $1 \times n$  维的空间,  $n$  为系统阶数;

[0062] S12、计算非最小相位系统模型的输出相对阶:

$$[0063] \quad \begin{cases} \mathbf{C}\mathbf{A}^i\mathbf{B} = 0, \quad 0 \leq i < r-1 \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{r-1}\mathbf{B} \neq 0, \quad r \leq n \end{cases} \quad (2)$$

[0064] 其中,  $r$  为非最小相位系统模型的输出相对阶;

[0065] S13、设S12中所计算的相对阶  $r < n$ , 设计非奇异转换矩阵  $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times n}$  将S11中的系统

状态分解为:

$$[0066] \quad \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \boldsymbol{\eta} \end{bmatrix} = \Phi \mathbf{x} \quad (3)$$

[0067] 其中,  $\mathbf{z} = [z_1, z_2, \dots, z_r]^T \in \mathbb{R}^{r \times 1}$  代表外部状态, 其与系统的控制输入密切相关,  $\boldsymbol{\eta} = [\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r}]^T \in \mathbb{R}^{(n-r) \times 1}$  代表系统内部状态, 其不受系统控制输入的影响;

[0068] S14、根据步骤S13中的转换关系, 写出S11中系统的一般形式为:

$$[0069] \quad \begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_{r-1} = z_r \\ \dot{z}_r = \mathbf{C}^T \Phi^{-1} [\mathbf{z} \quad \boldsymbol{\eta}]^T + \mathbf{C}^T \mathbf{A}^{r-1} \mathbf{B} u \\ \dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{P} \boldsymbol{\eta} + \mathbf{Q} \mathbf{z} \end{cases} \quad (4)$$

[0070] 其中,  $\dot{z}_1, \dots, \dot{z}_r$  分别代表外部状态  $z_1, \dots, z_r$  的一阶导数; 第一个状态  $z_1$  等价于S11中系统的输出  $y$ , 其也是系统 (4) 的输出; 矩阵  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)}$  和  $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{(n-r) \times r}$  分别是内部动态的系统矩阵和输入矩阵,  $\dot{\boldsymbol{\eta}}$  表示系统内部状态  $\boldsymbol{\eta}$  的一阶导数;

[0071] S15、基于S14中得到的一般形式的系统模型, 以及S13中的转换关系, 构造转换矩阵  $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times n}$  为:

$$[0072] \quad \Phi = [\mathbf{C} \quad \mathbf{C} \mathbf{A} \quad \dots \quad \mathbf{C} \mathbf{A}^{r-1} \quad \alpha_1 \quad \dots \quad \alpha_i \quad \dots \quad \alpha_{n-r}]^T$$

[0073] 其中,  $0 \leq i \leq n-r$ ,  $\alpha_i$  是在保证矩阵  $\Phi$  为非奇异的 (满秩的) 情况下, 通过求解方程  $\alpha_i \mathbf{B} = 0$  所得;

[0074] S16、在S14系统模型, 设置输出  $y = z_1$  恒为0, 求解系统 (4) 的零动态为

$$[0075] \quad \dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{P} \boldsymbol{\eta} \quad (5)$$

[0076] (5) 描述了系统内部动力学特性, 如果 (5) 中的矩阵  $\mathbf{P}$  有至少一个特征值位于频域左半平面, 即  $\lambda(\mathbf{P}) > 0$ , 则称S14中的系统 (4) 为非最小相位系统;

[0077] S17、在S14-S16的基础上, 判定系统是否为非最小相位系统, 进而定义基于输出重定义后得到的系统输出矩阵为  $\mathbf{C}^{OR} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ , 由此建立最小相位系统为

$$[0078] \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} u \\ \mathbf{y}^{OR} = \mathbf{C}^{OR} \mathbf{x} \end{cases} \quad (6)$$

[0079] 其中,  $\mathbf{y}^{OR} \in \mathbb{R}$  是重定义后的系统输出, 此输出能够确保系统 (6) 为最小相位系统; 为方便记录, 在其余地方上标“OR”均代表实施输出重定义后的变量;

[0080] S18、通过求解下列两条件中的相关方程, 使  $\mathbf{y}^{OR}$  为最小相位输出:

[0081] 条件1: 存在一个状态反馈变量  $\mathbf{K}_c \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ , 使得矩阵  $(\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K}_c)$  有  $n-r$  个特征值位于频域的左半平面;

[0082] 条件2: 重定义后的输出矩阵  $\mathbf{C}^{OR}$  满足如下条件

$$[0083] \quad \begin{cases} C^{OR} A^{r-1} (A - BK_c) = 0 \\ C^{OR} A^i B = 0, \quad i = 0, 1, \dots, r-2 \\ C^{OR} A^{r-1} B \neq 0 \end{cases} \quad (7);$$

[0084] S19、需要注意的是,由条件1和条件2求解得到的系统最小相位输出矩阵 $C^{OR}$ 不止有一个,需要选择一个较为合适的输出矩阵,方便后续操作。定义从候选池中选择的的最小相位输出矩阵为 $C_{opt}^{OR}$ ,其满足:

$$[0085] \quad C_{opt}^{OR} = \min \left\{ \|C - C_i^{OR}\|_2 \mid i \in \{1, 2, \dots, n^{OR}\} \right\} \quad (8)$$

[0086] 其中, $n^{OR}$ 是通过条件1,2求解得到的最小相位输出 $C^{OR}$ 的个数, $n^{OR} \geq 1$ ;  $\| \cdot \|_2$ 表示欧氏距离。因此,基于S11-S19的步骤,可求解得到原始非最小相位系统(1)的近似最小相位系统(6)以及最小相位输出 $C_{opt}^{OR}$ 。

[0087] S2、针对S1中建立的最小相位系统,以原始非最小相位系统的参考轨迹为基础,设计迭代解算方案,求解最小相位系统的参考轨迹;包括以下子步骤:

[0088] S21、对于原始非最小相位系统(1)而言,其参考轨迹为 $y_d$ ,定义跟踪误差为 $\tilde{y} = y_d - y$ ;跟踪控制目标为:设计控制输入 $u$ ,使得跟踪误差满足下列不等式:

$$[0089] \quad |\tilde{y}(t)| \leq \bar{y}(\varepsilon), \quad \forall t > t_b \quad (9)$$

[0090] 其中, $\bar{y}(\varepsilon) > 0$ ,  $\bar{y}(\varepsilon)$ 代表了跟踪误差 $\tilde{y}(t)$ 的最终界限,当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时,满足 $\bar{y}(\varepsilon) \rightarrow 0$ ;  $\varepsilon > 0$ ,  $\varepsilon$ 是一个可调整的参数; $t_b > 0$ 是系统相应的稳定时间;

[0091] S22、在S21定义的参考轨迹基础上,定义系统(1)的参考系统为:

$$[0092] \quad \begin{cases} \dot{x}_d = Ax_d + Bu_d \\ y_d = Cx_d \end{cases} \quad (10)$$

[0093] 其中, $x_d$ 代表系统的参考状态, $\dot{x}_d$ 表示 $x_d$ 的一阶导数; $u_d$ 代表系统的参考控制输入;结合(10)与(1),定义状态跟踪误差为 $\tilde{x} = x_d - x$ ,其一阶导数为 $\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B(u_d - u)$ ;

[0094] S23、基于S13中建立的一般形式系统模型,在已知系统原始非最小相位系统的参考轨迹基础上,得到外部状态的参考为:

$$[0095] \quad z_d = \begin{bmatrix} y_d & (y_d)' & \dots & (y_d)^{(r-1)} \end{bmatrix}^T \quad (11)$$

[0096]  $(y_d)' \dots (y_d)^{(r-1)}$ 分别表示 $y_d$ 的一到 $r-1$ 阶导数;

[0097] 由此,进一步根据内部动态与外部动态的关系:

$$[0098] \quad \dot{\eta}_d = Qz_d + P\eta_d \quad (12)$$

[0099] 通过求解(12)的微分方程,计算得到内部状态的参考 $\eta_d$ 为:

$$[0100] \quad \eta_d = e^{Pt} \eta_d(0) + \int_{-\infty}^t e^{P(t-\tau)} Qz_d(\tau) d\tau \quad (13)$$

[0101] 其中, $\eta_d(0)$ 代表 $\eta_d$ 的初值;

[0102] S24、在S23计算得到外部状态与内部状态的基础上,进一步计算系统的参考状态

为:

$$[0103] \quad \mathbf{x}_d = (\Phi)^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_d \\ \boldsymbol{\eta}_d \end{bmatrix} \quad (14)$$

[0104] 以及控制输入的参考:

$$[0105] \quad \mathbf{u}_d = (\mathbf{CA}^{r-1}\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{y}_d^{(r)} - \mathbf{CA}^r\Phi^{-1}[\mathbf{z}_d \quad \boldsymbol{\eta}_d]^T) \quad (15);$$

[0106] 上述 (13) - (15) 公式给出的步骤实质上就是为了寻找系统稳定逆。然而,由非最小相位固有的特性,解算内部动态的方程 (12) 是不稳定的,所以 (13) - (15) 给出的公式,实际上无法直接解算。因此,只有通过输出重定义,寻找到最小相位系统,才能够通过 (13) - (15) 的公式,计算得到系统的状态参考轨迹和控制输入参考,为设计控制器奠定基础。

[0107] S25、对于输出重定义后的最小相位系统 (6),在求解到最小相位输出的基础上,应用 (13) - (15) 的稳定逆求解方法,计算系统 (6) 的状态参考和控制输入参考分别为:

$$[0108] \quad \mathbf{x}_d^{OR} = (\Phi^{OR})^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_d^{OR} \\ \boldsymbol{\eta}_d^{OR} \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$[0109] \quad \mathbf{u}_d^{OR} = (\mathbf{C}^{OR}\mathbf{A}^{r-1}\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{y}_d^{(r)} - \mathbf{C}^{OR}\mathbf{A}^r(\Phi^{OR})^{-1}[\mathbf{z}_d^{OR} \quad \boldsymbol{\eta}_d^{OR}]^T) \quad (17);$$

[0110] S26、计算量化近似误差:

$$[0111] \quad \mathbf{e}_{x_d} = \mathbf{C}\mathbf{x}_d^{OR} - \mathbf{C}\mathbf{x}_d = \mathbf{C}(\mathbf{x}_d^{OR} - \mathbf{x}_d) \quad (18)$$

[0112] 式 (18) 中,  $\mathbf{x}_d^{OR}$  是由原始非最小相位系统的参考  $\mathbf{y}_d$  所计算得到的,由于寻找的最小相位输出  $\mathbf{C}_{opt}^{OR}$  不等于原始的非最小相位输出矩阵  $\mathbf{C}$ ,所以基于输出重定义方法计算得到的  $\mathbf{x}_d^{OR}$  只能是近似于  $\mathbf{x}_d$ ,这种近似就是带来输出跟踪误差的根本原因;

[0113] S26、根据S25中的分析过程,为解决 (18) 所带来的近似误差,采用迭代求解算法求解输出重定义后最小相位系统的真实参考轨迹,其具体过程由下列算法1给出:

[0114] 算法1:输出参考轨迹  $\mathbf{y}_d^{IR}$  的迭代重定义

[0115] 数据:原始非最小相位系统的参考轨迹  $\mathbf{y}_d$ ,当前迭代周期  $j$ ,阈值  $\varepsilon$ ,最大迭代次数  $N$ ,迭代增益  $k_a$ ;

[0116] 输出:输出重定义后的最小相位系统的参考轨迹  $\mathbf{y}_d^{IR}$ 。

[0117] 如图2所示,其具体流程为:

[0118] A、选择迭代初值  $\mathbf{y}_0^{IR} = \mathbf{y}_d$ ,  $\mathbf{y}_d$  为原始非最小相位系统的参考轨迹;令最小相位输出  $\mathbf{C}^{IR} = \mathbf{C}_i^{OR}$ ,其中  $i \in \{1, 2, \dots, n^{OR}\}$ ,且令当前迭代周期  $j=0$ ;

[0119] B、若  $j < N$ ,基于非奇异转换矩阵  $\Phi^{IR}$  和稳定逆计算方法,将最小相位输出  $\mathbf{C}^{IR}$  带入公式 (13) - (15) 计算系统此迭代周期的状态参考和控制输入参考分别为:

$$[0120] \quad \mathbf{x}_{jd}^{IR} = (\Phi^{IR})^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{jd}^{IR} \\ \boldsymbol{\eta}_{jd}^{IR} \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$[0121] \quad u_{jd}^{IR} = (\mathbf{C}^{IR} \mathbf{A}^{r-1} \mathbf{B})^{-1} (y_d^{(r)} - \mathbf{C}^{IR} \mathbf{A}^r (\Phi^{IR})^{-1} [\mathbf{z}_{jd}^{IR} \quad \boldsymbol{\eta}_{jd}^{IR}]^T) \quad (20)$$

[0122]  $\mathbf{z}_{jd}^{IR}$ 、 $\boldsymbol{\eta}_{jd}^{IR}$  分别表示实施输出重定义后第j次迭代的外部状态的参考和内部状态的参考；

[0123] 而后，计算得到  $y_j^{IR} = \mathbf{C}x_{jd}^{IR}$ ；并执行步骤C；

[0124] 若  $j \geq N$ ，终止迭代，输出  $y_d^{IR} = y_j^{IR}$ ，结束操作；其中，N为最大迭代次数；

[0125] C、若  $\|y_j^{IR}(t) - y_d(t)\|_{\infty} \geq \varepsilon$ ，其中， $\varepsilon$ 为预设的阈值；令  $j = j+1$ ，计算下一个迭代周期的最小相位系统的参考轨迹：

$$[0126] \quad y_j^{IR} = y_{j-1}^{IR} + k_a (y_d - y_{j-1}^{IR}) \quad (21)$$

[0127] 并返回步骤B；否则终止迭代并输出  $y_d^{IR} = y_j^{IR}$ ，结束操作。

[0128] 通过上述迭代算法，可计算输出重定义后的最小相位系统的参考轨迹  $y_d^{IR}$ ，有效的减小输出跟踪误差，提高控制精度。

[0129] S3、利用S2中迭代求解的最小相位系统的参考轨迹，设计基于“反馈+前馈”结构的控制器；包括以下子步骤：

[0130] S31、根据步骤S2中的最小相位系统的参考轨迹，对步骤S11中的系统(1)设计基于“反馈+前馈”结构的控制器如下：

$$[0131] \quad u = u_d + \mathbf{K}(x_d - x) \quad (22)$$

[0132] 其中， $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ 是反馈增益矩阵， $u_d$ 和 $x_d$ 分别是控制输入参考和状态参考；前馈控制项 $u_d$ 用于实现精确跟踪，反馈控制项 $\mathbf{K}(x_d - x)$ 用于提高系统稳定性并修正与状态参考轨迹的偏差；S32、依据极点配置定理，确定反馈增益矩阵 $\mathbf{K}$ 。

[0133] 本领域的普通技术人员将会意识到，这里所述的实施例是为了帮助读者理解本发明的原理，应被理解为本发明的保护范围并不局限于这样的特别陈述和实施例。本领域的普通技术人员可以根据本发明公开的这些技术启示做出各种不脱离本发明实质的其它各种具体变形和组合，这些变形和组合仍然在本发明的保护范围内。

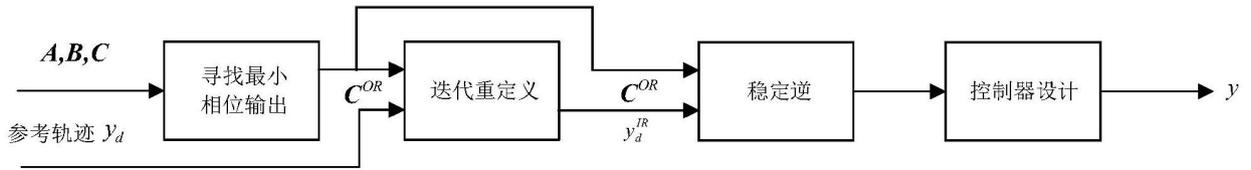


图1

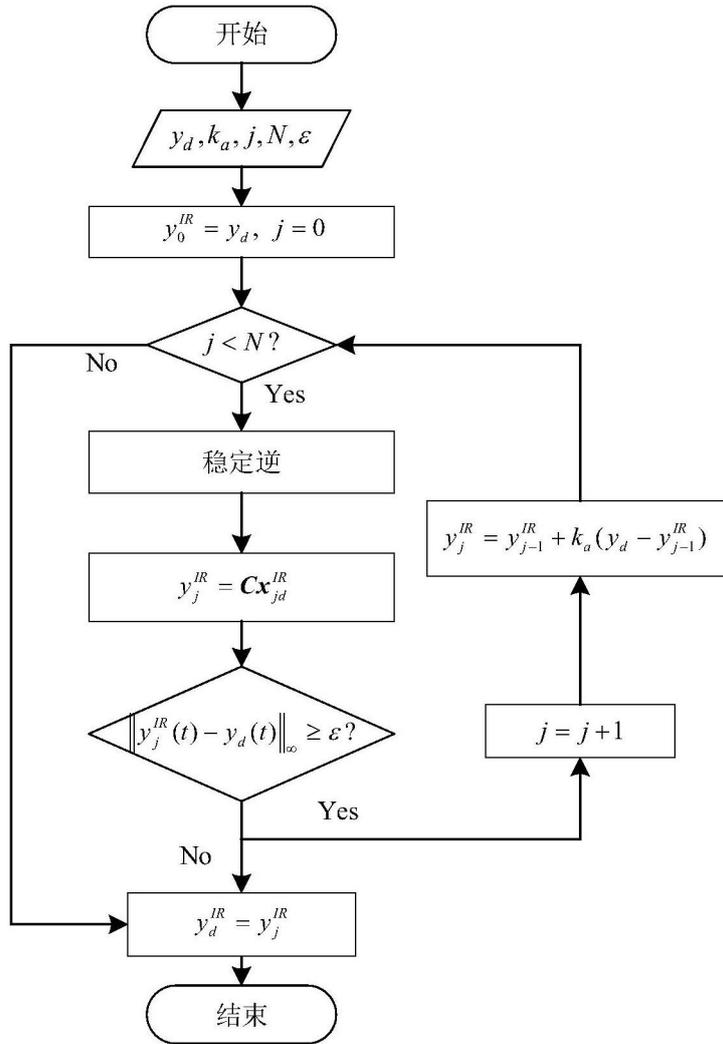


图2