

12)

DEMANDE DE BREVET D'INVENTION

A1

22) Date de dépôt : 23.12.05.

30) Priorité :

43) Date de mise à la disposition du public de la demande : 29.06.07 Bulletin 07/26.

56) Liste des documents cités dans le rapport de recherche préliminaire : *Se reporter à la fin du présent fascicule*

60) Références à d'autres documents nationaux apparentés :

71) Demandeur(s) : *CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE Etablissement public à caractère scientifique et technologique — FR, ECOLE NORMALE SUPÉRIEURE CACHAN — FR et UNIVERSITY OF ARIZONA — US.*

72) Inventeur(s) : *PLACKO DOMINIQUE, LIEBEAUX NICOLAS, CRUAU AURELIE et KUNDU TRIBIKRAM.*

73) Titulaire(s) :

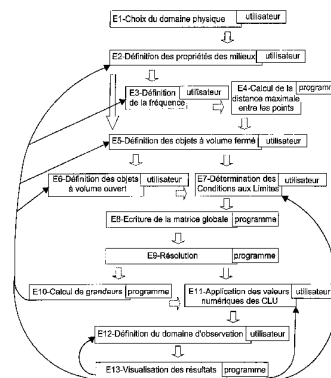
74) Mandataire(s) : *MARKS & CLERK FRANCE.*

54) **PROCÉDE UNIVERSEL DE MODELISATION DES INTERACTIONS ENTRE AU MOINS UNE ONDE ET AU MOINS UN OBJET, LA SURFACE DE CHAQUE OBJET DEFINISSANT UNE INTERFACE ENTRE AU MOINS DEUX MILIEUX.**

57) La présente invention est relative à un procédé de modélisation des interactions dans un système entre au moins une onde et au moins un objet, la surface de chaque objet définissant une interface entre au moins deux milieux, et elle est caractérisée en ce que ce procédé comporte essentiellement les étapes suivantes :

- on définit les propriétés physiques de chaque milieu considéré composant le système,
- on crée chaque objet du système en le maillant et on associe de chaque côté de chaque maille au moins une source élémentaire ponctuelle,
- on détermine le type de conditions aux limites pour chaque interface,
- on construit la matrice globale des interactions entre les différents objets, dépendant des conditions aux limites, des propriétés des milieux et de la configuration du système,
- on inverse la matrice globale,
- on multiplie la matrice inversée par une matrice colonne contenant les valeurs des conditions aux limites d'excitation,
- on obtient une matrice colonne contenant les valeurs

de l'ensemble des sources ponctuelles élémentaires,
 - on calcule en tout point du système les grandeurs physiques représentatives des interactions et on obtient un modèle analytique des interactions au sein du système.



FR 2 895 544 - A1



**PROCEDE UNIVERSEL DE MODELISATION DES INTERACTIONS
ENTRE AU MOINS UNE ONDE ET AU MOINS UN OBJET, LA SURFACE
DE CHAQUE OBJET DEFINISSANT UNE INTERFACE ENTRE AU MOINS
DEUX MILIEUX**

5

La présente invention se rapporte à un procédé universel de modélisation des interactions entre au moins une onde et au moins un objet, la surface de chaque objet définissant une interface entre au moins deux milieux.

10 D'après le brevet français 2 847 051, on connaît un procédé permettant d'évaluer une grandeur physique représentative d'une interaction entre une onde et un obstacle. La mise en œuvre de ce procédé est d'une grande utilité dans des applications telles que le contrôle non destructif. Toutefois, il ne peut s'appliquer de façon simple qu'au cas d'une seule interface séparant deux milieux.

15 On connaît d'après la demande de brevet français 05 00731 un procédé de contrôle par ultrasons mettant en œuvre l'évaluation des interactions décrite dans ledit brevet français, mais ce procédé n'est pas généralisable aux interactions aux objets comportant plusieurs milieux, en particulier à cause des très nombreuses réflexions et transmissions générées par l'onde ultrasonore incidente au passage des interfaces.

20

La présente invention a pour objet un procédé de modélisation des interactions entre au moins une onde et au moins un objet, la surface de chaque objet définissant une interface entre au moins deux milieux de propriétés physiques différentes, procédé qui soit simple à mettre en œuvre et qui soit applicable dans différents domaines de la physique, pour des régimes temporels continus, sinusoïdaux ou impulsionnels, et ce, quelle que soit la composition du système étudié.

25

Dans toute la description qui suit, il sera question de « système », qui est, au sens de la présente invention, un domaine de l'espace dans lequel ont lieu les interactions que l'on cherche à modéliser.

30

Le procédé conforme à l'invention est un procédé de modélisation des interactions dans un système entre au moins une onde et au moins un objet, la surface

de chaque objet définissant une interface entre au moins deux milieux, et il est caractérisé en ce qu'il comporte les étapes suivantes :

- on définit les propriétés physiques de chaque milieu considéré composant le système,
- 5 - on définit la structure géométrique de chaque objet du système en le maillant, et on positionne à la surface de chaque maille au moins un point test,
- en chaque point test, on définit au moins une grandeur test pour chaque milieu considéré afin d'établir des équations de continuité pour les conditions aux limites,
- 10 - on associe de chaque côté de chaque maille au moins une source élémentaire ponctuelle,
- on positionne les objets les uns par rapport aux autres dans l'espace,
- on associe des milieux aux volumes délimités par les objets,
- 15 - on détermine le type de conditions aux limites pour chaque interface,
- on construit la matrice globale des interactions entre les différents objets, cette matrice étant constituée d'au moins un bloc matriciel caractérisant les interactions entre les objets pris deux à deux, ces interactions étant liées à la propagation de l'onde dans le milieu considéré, la matrice globale comportant au maximum autant de blocs qu'il y a de combinaisons possibles entre tous les objets pris deux à deux, le contenu de chaque bloc dépendant du type de conditions aux limites fixées sur les points test, des propriétés du milieu commun aux deux objets considérés, et de la configuration géométrique de ces objets,
- 20 - on inverse la matrice globale,
- on multiplie la matrice inversée par une matrice colonne contenant les valeurs des conditions aux limites d'excitation imposée par l'utilisateur, et, le cas échéant, des zéros correspondant aux conditions aux limites intrinsèques,
- 25 - on obtient une matrice colonne contenant les valeurs de l'ensemble des sources ponctuelles élémentaires,
- 30

- on calcule en tout point d'observation du système les grandeurs physiques représentatives des interactions au sein du système en fonction des zones d'influence considérées des sources ponctuelles ;
- on obtient un modèle analytique des interactions au sein du système.

5 Selon une autre caractéristique de l'invention, les points test sont répartis aléatoirement d'une maille à la suivante, de façon à éviter de privilégier au moins une direction de propagation particulière.

Selon une autre caractéristique de l'invention, on calcule des grandeurs macroscopiques dans au moins une partie du système. Selon une autre caractéristique
10 de l'invention, on visualise les grandeurs physiques créées par l'ensemble des sources ponctuelles élémentaires considérées.

Selon une autre caractéristique de l'invention, on définit des objets à volume fermé dont la surface est à chaque fois obligatoirement fermée et constitue une frontière entre le milieu extérieur à l'objet et un milieu interne à l'objet, et on définit
15 des objets à volume ouvert dont la surface est ouverte du fait qu'elle représente une interface entre milieux semi infinis. Lorsque cette interface est créée, elle est bornée latéralement par un ensemble de frontières qui sont celles de l'espace de travail dans lequel est étudiée l'interaction.

Selon encore une autre caractéristique de l'invention, on utilise deux sortes de
20 conditions aux limites, les conditions aux limites intrinsèques et les conditions aux limites fixées par l'utilisateur, les premières traduisant la continuité des grandeurs scalaires et/ou vectorielles au passage d'une interface entre deux milieux de propriétés déterminées ou déterminables, et les secondes traduisant la connaissance *a priori* qu'a l'utilisateur de la grandeur scalaire et/ou vectorielle pour une interface.

25 La présente invention sera mieux comprise à la lecture de la description détaillée d'un mode de réalisation, pris à titre d'exemple non limitatif et illustré par le dessin annexé, sur lequel :

- la figure 1 est un organigramme simplifié d'un mode de mise en œuvre du procédé de l'invention,
- 30 - les figures 2 à 8 sont des schémas simplifiés de systèmes sur lesquels est mis en œuvre le procédé de l'invention, et

- les figures 9 à 19 sont des schémas très simplifiés de milieux non homogènes sur lesquels est mis en œuvre le procédé de l'invention.

Le principe de modélisation des interactions entre une onde incidente et un milieu homogène ayant été décrit en détail dans ledit brevet français 2 847 051, ne sera pas décrit à nouveau ici, et sera simplement cité sous son appellation simplifiée
5 DPSM (« Distributed Point Source Method »). Le présent procédé se présente comme un perfectionnement de ce procédé connu pour en permettre l'application aux milieux non homogènes.

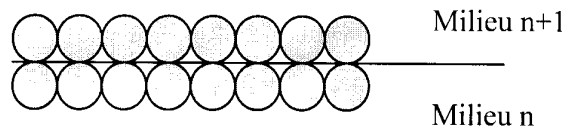
La caractéristique importante constituant le cœur de l'invention consiste à
10 propager de proche en proche les conditions aux limites, grâce à des couches de sources chargées de la synthèse des grandeurs dans un milieu considéré. Le problème est naturellement résolu de façon globale pour assurer la continuité des grandeurs propagées dans tout le système.

Dans les trois schémas explicatifs qui suivent, on a figuré par un segment de
15 droite une portion d'interface de chaque côté de laquelle, ou d'un côté de laquelle, on a représenté des surfaces sphériques contenant au moins une source ponctuelle, ces surfaces étant tangentes à l'interface. Ces sources ponctuelles et les surfaces sphériques qui les contiennent résultent d'un maillage qui modélise, au sens du susdit brevet français 2 847 051, soit un transducteur, soit une interface. Dans les schémas
20 ci-dessous, des cercles en gris clair correspondent à des conditions aux limites intrinsèques, et des cercles en gris foncé correspondent à des conditions aux limites fixées par l'utilisateur. Chaque maille est associée à une surface sphérique contenant au moins une source ponctuelle.

Dans un cas particulier, le point de contact entre ces surfaces sphériques et
25 l'interface est un point test, mais il est bien entendu que l'on peut répartir plusieurs point test dans chaque maille.

Le nombre total de paramètres inconnus des sources doit être égal au nombre total d'équations disponibles, le nombre d'équations étant ajusté par un choix correspondant du nombre total de points test.

- 30 ▪ Conditions aux limites intrinsèques (CLI)



Au passage des interfaces, la continuité « naturelle » est assurée par les CLI. Les sources représentées dans le milieu n+1 ne servent qu'à propager l'onde dans le milieu n, et réciproquement. Par exemple en magnétostatique ou en magnétodynamique, les composantes du vecteur source, à savoir la composante normale de l'induction magnétique B et la composante tangentielle du champ magnétique H sont conservées.

- Conditions aux limites utilisateurs (CLU)

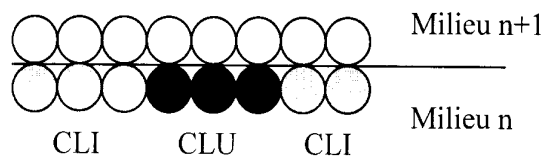
10



Les CLU traduisent notamment la présence d'une excitation dans le système. La figure ci-dessus représente par exemple une CLU valable vers le milieu n+1. Dans cet exemple, les sources du Milieu n+1 n'existent pas, car on ne calcule pas de grandeur dans le milieu n, mais il est bien entendu qu'on n'exclut pas pour autant la possibilité de placer des sources dans le Milieu n+1, ces sources rayonnant dans le Milieu n. Par exemple en électrostatique ou en électrodynamique, le potentiel électrostatique, exprimé en volts, sur une électrode d'un condensateur, est constant et en général fixé par l'utilisateur.

25

- Conditions aux limites mixtes (CLI/CLU)



30

Ces conditions aux limites reprennent les définitions ci-dessus. Les autres sources ponctuelles maillant l'interface ne servent qu'à assurer des CLI entre le milieu n et le milieu $n+1$.

5 Quelles que soient les conditions aux limites, toutes les sources ponctuelles peuvent être configurées individuellement et posséder leur propre diagramme de rayonnement spécifique.

10 Une fois que l'on a défini les propriétés physiques de chaque milieu constituant un système à N objets dans lequel ont lieu les interactions étudiées, et que l'on a maillé ses différentes interfaces, on construit la matrice globale des interactions étudiées de la façon générale suivante.

$$\begin{array}{l}
 N \text{ blocs} \\
 \left\{ \begin{array}{l} C \\ O \\ N \\ D \\ I \\ T \\ I \\ O \\ N \\ S \end{array} \right\} = \left(\begin{array}{cccc} [CLI]^{11} & [CLI]^{12} & \dots & [CLU]^{1N} \\ \vdots & & [CLI]^{ij} & \vdots \\ [CLI]^{N1} & [CLU]^{N2} & \dots & \dots \end{array} \right) \bullet \left(\begin{array}{l} S \\ O \\ U \\ R \\ C \\ E \\ S \end{array} \right) \left. \vphantom{\begin{array}{l} S \\ O \\ U \\ R \\ C \\ E \\ S \end{array}} \right\} N \text{ blocs}
 \end{array}$$

Puisque le système comporte N objets, la matrice comporte $N \times N$ blocs. Ces blocs, ou matrices élémentaires, traduisent les conditions de passage entre les différents objets. Le bloc de coordonnées (i,j) représente la part de conditions aux limites calculées sur l'interface de l'objet i et due à l'influence de l'objet j (les objets i et j interagissent dans un milieu commun).

Selon une caractéristique de l'invention, le nombre total de composantes de source doit être adapté au nombre total de points test.

- S'il existe une CLU sur l'objet i (ligne i de la matrice), alors le vecteur bloc CONDITIONS n° i comprend la valeur des CLU considérées.
- Lorsque l'utilisateur fixe lui-même la valeur des sources associées à une CLU, le bloc CONDITIONS correspondant est égal à la valeur de ces sources. La matrice CLU correspondante est une matrice identité.

- Si sur l'objet ne s'appliquent que des CLI, alors le bloc correspondant du vecteur CONDITIONS est nul.

Selon une caractéristique de l'invention, les matrices élémentaires [CLI] sont constituées de types de sous-matrices notés dans les exemples décrits ci-dessous M et
 5 Q. Ces sous-matrices sont calculées selon les domaines d'application (ultrasons, électromagnétisme, acoustique, etc.) pour assurer respectivement la continuité des grandeurs aux interfaces, par exemple les composantes normale et tangentielle d'une grandeur vectorielle, ou encore une grandeur scalaire et une composante vectorielle normale .

10 Il en va de même pour les matrices CLU, mais l'une des grandeurs est alors imposée par l'utilisateur.

Après avoir exposé les principes de base du procédé de l'invention, on va maintenant décrire en référence à l'organigramme de la figure 1 les différentes étapes mises en œuvre par le programme de l'invention pour résoudre concrètement la
 15 modélisation des interactions entre des objets délimitant des milieux de propriétés différentes. Ce programme étant interactif, il est précisé pour chacune de ses étapes si elle est exécutée à l'initiative de l'utilisateur ou à celle du calculateur de mise en œuvre, ce dernier assurant principalement des étapes de calcul d'équations et de visualisation.

20 Etant donné que l'invention s'applique à des domaines physiques très divers, tels que l'électromagnétisme, la magnétostatique, l'acoustique, les courants de Foucault ou la thermique, il convient tout d'abord (étape E 1) de faire choisir par l'utilisateur le domaine concerné, du fait que certaines étapes du programme décrites ci-dessous sont spécifiques de ce domaine concerné.

25 L'utilisateur définit ensuite les propriétés des milieux dans lesquels se produisent les interactions à modéliser (étape E 2). Ces propriétés comprennent tous les paramètres pertinents des milieux. Le type de propriétés des milieux va dépendre du problème étudié. Par exemple, pour de l'électrostatique la permittivité relative est un paramètre indispensable. Cette étape va permettre de créer les Indicateurs de
 30 Correspondance qui précisent les milieux adjacents à chaque objet. Les objets sont associés à deux milieux selon la formulation : $i(\alpha,\beta)$ où i désigne l'objet et α et β les

milieux adjacents à i . Chaque objet a son Indicateur de Correspondance, ce qui permet de déterminer quelles sont les sources à prendre en compte dans les interactions, comme exposé ci-dessous en référence à plusieurs exemples simplifiés.

A partir de l'étape E 2, se présentent deux possibilités : soit passer par les
5 étapes E 3, E 4 et E 5, soit passer directement à l'étape E 5. On ne passe par les
étapes E3 et E4 que lorsqu'il s'agit de prendre en compte des phénomènes de
propagation d'ondes. A l'étape E 3, l'utilisateur définit la fréquence des ondes qui
doivent être émises par le transducteur émetteur. Une fois cette fréquence définie, le
programme calcule (étape E 4) la distance maximale entre les sources ponctuelles
10 (c'est-à-dire leur pas, pour une configuration régulière de ces sources), en fonction
des caractéristiques des interactions. Ce pas est, de préférence, inférieur à la demi-
longueur d'onde à l'origine de ces interactions.

A l'étape E 5, l'utilisateur définit des objets à volume fermé (dénommés ci-
après OVF). Cette étape consiste essentiellement à définir géométriquement de tels
15 objets et à déterminer le pas du maillage pour pouvoir mettre en œuvre le procédé de
l'invention, le maillage étant réalisé de la façon décrite dans ledit brevet français de
DPSM.

Selon l'invention, un objet à volume fermé (OVF) est tel que sa surface est
obligatoirement fermée (par exemple, une sphère, une pyramide ou un cube). Cette
20 surface est une frontière entre le milieu extérieur et un milieu interne à l'objet, de
propriétés différentes. Si l'utilisateur ne souhaite pas calculer de grandeurs dans ce
milieu, il doit alors appliquer des conditions limites (déterminées par lui-même et
appelées ici CLU) à sa surface. Le volume de cet objet peut tendre vers zéro (par
exemple pour des électrodes plates d'un condensateur).

Toujours selon l'invention, un objet à volume ouvert (appelé ici OVO) est tel
25 que la surface de cet objet est ouverte (en théorie, ce volume est fermé à l'infini).
Elle représente une limite entre milieux semi-infinis. Quand une interface est créée
pour représenter cette configuration, elle est forcément bornée latéralement par un
ensemble de frontières. Ces frontières deviennent aussi celles de l'étude et aucune
30 observation de grandeurs en dehors de l'espace délimité par ces frontières ne sera

possible. Cet espace de travail est donc automatiquement borné. Les objets et milieux considérés par l'invention appartiennent nécessairement à l'espace de travail.

Si le problème à résoudre ne comporte que des objets à volume fermé, alors il n'est pas nécessaire de borner l'espace de travail. A titre d'illustration, le problème de l'étude du champ électrique dans l'espace créé par deux sphères chargées ne nécessite pas d'espace de travail. De même l'exemple, décrit ci-dessous en référence aux figures 6 à 8, montre deux systèmes non bornés dans l'espace.

Si l'ensemble du système est contenu dans un OVF avec des CLU internes de l'objet, sa surface délimite l'espace de travail (comme dans l'exemple décrit ci-dessous en référence aux figures 4 et 5).

En effet, un milieu est défini par ses propriétés physiques homogènes. Un milieu est nécessairement fermé, soit parce qu'il est contenu dans un OVF, soit parce qu'il est borné par un ou plusieurs objets à volume ouvert (dénommés ici OVO) et par les frontières délimitant l'espace de travail. Pour définir un milieu, il est nécessaire de connaître sa localisation et ses propriétés physiques. Dans la description qui suit, les milieux sont référencés par des numéros.

Les surfaces des objets définissent les interfaces entre deux milieux. Pour définir un objet, il est nécessaire de connaître :

1. ses dimensions et sa localisation.
2. les conditions aux limites s'appliquant sur sa surface.
3. les milieux avec lesquels l'objet est en contact.

Dans la présente description, les objets sont référencés par des lettres. La création des objets correspond à une discrétisation des surfaces de ces objets en ensembles de points P auxquels sont associés les ensembles de points sources chargés de synthétiser les ondes se propageant dans le système. Ces objets déterminent des interfaces sur lesquelles sont appliquées des Conditions aux Limites (CL).

A partir de l'étape E 5, l'utilisateur soit passe par une étape E 6 de définition d'OVO (si de tels objets sont présents) pour arriver à l'étape E 7, soit passe directement à l'étape E 7 dans le cas contraire.

La définition et/ou le maillage de tout ou partie du système peuvent être

fournis par un dispositif ou un logiciel extérieurs à l'invention.

L'étape E 7 consiste à déterminer des conditions aux limites, qui constituent une des conditions essentielles de la mise en œuvre du procédé de l'invention. Ces conditions aux limites sont placées sur une interface, qui est, comme précisé ci-dessus, une surface séparatrice entre deux milieux de propriétés différentes. Une autre caractéristique de l'invention est d'associer des couches de sources ponctuelles uniquement aux surfaces des objets (qu'ils soient des OVO ou des OVF). L'invention prend en compte deux types de conditions aux limites :

1. Les conditions aux limites intrinsèques (CLI), qui traduisent la continuité des grandeurs scalaires et/ou vectorielles au passage d'une interface entre deux milieux de propriétés connues. D'après le principe de base du procédé de l'invention, ces CLI seront satisfaites grâce à des ensembles de sources situées de part et d'autre de la surface. Dans la plupart des cas, l'utilisateur n'a pas à se préoccuper de ces CLI.

2. Les conditions aux limites fixées par l'utilisateur (CLU), qui traduisent la connaissance *a priori* qu'a l'utilisateur de la grandeur scalaire et/ou vectorielle sur une interface. D'après le principe de base du procédé de l'invention, ces CLU seront satisfaites grâce à un seul ensemble de sources situé d'un côté de l'interface. Notons que ces conditions aux limites traduisent la présence de sources d'énergie dans le système. Une telle CLU est, par exemple dans un condensateur, la différence de potentiel scalaire électrique entre les électrodes, qui est souvent connue car fixée par l'utilisateur.

Une fois les conditions aux limites déterminées pour toutes les interfaces, le programme, ayant reçu toutes les données nécessaires à son exécution, va passer à l'étape E 8 d'écriture de la matrice globale.

Cette étape E 8 commence d'abord par la détermination des matrices de couplage entre interfaces et nécessite une opération dite de masquage. Le masquage désigne le fait que certains objets du système peuvent se faire écran les uns les autres (ombres portées), comme exposé ci-dessus en référence aux figures 2 à 8. Cette

opération de masquage des objets entre eux requiert l'application d'une fonction de test. Cette dernière peut s'appliquer pendant le remplissage des matrices ou bien séparément pour construire une matrice de masquage (remplie de 0 ou de 1). Une multiplication élément par élément de ce masque avec la matrice de couplage d'origine calculée sans test permettra d'obtenir la matrice effectivement prise en compte dans l'algorithme.

Pour déterminer quelles matrices de couplage calculer une procédure de test, décrite ci-dessous, a été établie. Une fois toutes les matrices de couplage calculées, la matrice globale est ordonnancée par blocs. Dans l'étape de définition des milieux, une matrice contenant les informations principales, à savoir la position relative des milieux et des objets ainsi que leurs propriétés, a été créée à partir des indicateurs de correspondance. A partir de cette matrice, en utilisant des tests permettant de déterminer quels objets sont couplés et selon quels type de CL, on écrit la matrice globale par blocs de façon à prendre en compte systématiquement toutes les interactions. En classant les groupes de source dans l'ordre des interactions, les blocs seront placés principalement sur la diagonale et autour.

Avec les Indicateurs de Correspondance objets-milieux créés à l'étape précédente, on teste aisément si deux ou plusieurs objets ont un milieu commun. Ensuite on écrit les matrices de couplage des objets qui interagissent dans le même milieu. Par exemple, pour deux objets i et j ayant un milieu d'interaction commun α , les matrices obtenues vont s'écrire selon la formulation : $M_{ij}^{\alpha\beta}$ ou $Q_{ij}^{\alpha\beta}$. Cela se lit comme l'interaction de l'objet j sur l'objet i dans leur milieu commun α , les sources de j étant dans le milieu β . De même on note les sources par $A_{j\alpha\beta}$ les sources associée à l'objet j , étant dans le milieu β et rayonnant dans le milieu α .

Toutes les matrices de couplage M et Q ayant le même milieu commun α doivent être de même signe dans la matrice globale.

Pour chaque interface avec CLI, on assure, au moins dans ces exemples, la continuité de la grandeur scalaire (matrice Q) et de la composante normale de la grandeur vectorielle (matrice M). Par exemple, en électrostatique, ces grandeurs sont

le potentiel électrique et la composante normale du champ \vec{D} ; en ultrasons la pression et la composante normale de la vitesse.

Pour chaque interface avec CLU, on applique une seule équation matricielle (matrice M ou Q) car les conditions aux limites sur la surface sont imposées par l'utilisateur (par exemple des électrodes alimentées sous une tension déterminée).

Une fois la matrice globale écrite, le programme résout l'équation matricielle (étape E9), cette étape consistant essentiellement à inverser la matrice globale.

Du fait que certaines grandeurs (par exemple la capacité d'un condensateur) ne nécessitent pas de connaître les valeurs numériques des CLU pour être calculées, elles peuvent donc être obtenues directement après l'inversion, ce que fait directement le programme (étape E 10). Dans le cas où de telles grandeurs n'existent pas, ou bien si, en plus de telles grandeurs, il faut calculer d'autres grandeurs physiques, l'utilisateur intervient pour fournir au programme les données manquantes (étape E 11).

Les données manquantes pour le calcul des grandeurs physiques nécessaires à la modélisation des interactions sont demandées à l'utilisateur en fonction des types de conditions aux limites qui ont été fixées à l'étape E 7 (par exemple la valeur du potentiel constant sur une électrode métallique).

Ces données manquantes ayant été fournies par l'utilisateur, celui-ci passe à l'étape de définition du domaine d'observation à visualiser (étape E 12). Selon que l'utilisateur est passé par l'étape E 6 ou non, sa liberté de choix pour les calculs et observations sera plus ou moins grande : si l'espace de travail n'a pas été borné au cours de cette étape (le système, siège des interactions, ne comporte que des OVF), il n'y a pas de restriction sur la zone de visualisation. Dans le cas contraire, il doit définir l'espace de travail qui sera automatiquement borné.

Ensuite (étape E 13), le programme commence par le maillage des espaces donnés par l'utilisateur. Ensuite, il calcule les grandeurs physiques intervenant dans les interactions étudiées, selon la même procédure que celle utilisée pour le calcul des matrices de couplage, appliquée cette fois aux points de l'espace de visualisation. Enfin, le programme trace les représentations graphiques des phénomènes d'interaction au sein du système. Les flèches latérales représentées en figure 1

montrent que le programme peut être rebouclé pour permettre à l'utilisateur de revenir à la structure afin de la modifier et d'observer les nouveaux résultats obtenus.

Les modifications possibles concernent les définitions (objets, milieux, conditions aux limites,...), comme indiqué en figure 1 par les flèches partant des étapes E 10 et E 13 et dirigées vers les étapes E 2, E 3, E 5, E6, E7, E11 et E12. Ces modifications permettent d'étudier l'influence d'un déplacement (des OVO et/ou des OVF), d'un changement de propriété des objets ou des milieux.

Les trois exemples décrits ci-dessous en référence aux figures 2 à 8 illustrent la technique d'écriture de la matrice globale conforme à l'invention.

On a représenté en figures 2 et 3 le cas d'un système multicouche planaire 1, la figure 2 étant une vue très simplifiée en perspective, et la figure 3 une vue en coupe selon III-III de la figure 2.

Le système 1 représenté en figures 2 et 3 a une forme générale de parallélépipède rectangle dont les six faces sont des frontières de l'espace de travail. Il a une structure multidomaine comportant cinq milieux respectivement référencés Milieu 1 à Milieu 5 et six objets respectivement référencés **a** à **f**. Par exemple, l'interface entre le Milieu 1 et le Milieu 2 est référencée **e**, et celle entre le Milieu 2 et le Milieu 3 est référencée **b**. Deux OVF **a** et **d**, en l'occurrence des électrodes de condensateur, sont au contact des faces inférieure et supérieure de l'espace de travail. Le Milieu 2 comporte une première inclusion **b**, et une deuxième inclusion **c**, qui est en contact avec l'interface **f**. On remarquera que le Milieu 0 définit l'extérieur de l'espace de travail, qui n'est pas connu et n'intéresse pas l'utilisateur.

Les six différentes interfaces sont référencées de la manière suivante :

a : entre les Milieux 0 et 1

b : entre les Milieux 2 et 3

c : entre les Milieux 2 et 4

d : entre les Milieux 5 et 0

e : entre les Milieux 1 et 2

f : entre les Milieux 2 et 5

La CLU relative à l'électrode **a** s'écrit P_a (potentiel imposé par cette électrode à l'interface **a**), et la CLU imposée par l'électrode **d** s'écrit P_d (potentiel imposé par cette électrode à l'interface **d**).

Les vecteurs sources générés à chacune des interfaces **a** à **f** s'écrivent :

- 5 Interface **a** : Aa_{1_01} (du côté de l'électrode **a**)
 Interface **b** : Ab_{3_2} (dans le milieu 2) et Ab_{2_3} (dans le milieu 3)
 Interface **c** : Ac_{4_2} (dans le milieu 2) et Ac_{2_4} (dans le milieu 4)
 Interface **d** : Ad_{5_02} (du côté de l'électrode **d**)
 Interface **e** : Ae_{2_1} (dans le milieu 1) et Ae_{1_2} (dans le milieu 2)
 10 Interface **f** : Af_{5_2} (dans le milieu 2) et Af_{2_5} (dans le milieu 5)

D'après ce qui a été exposé plus haut, un indicateur de correspondance, relatif par exemple à l'interface **c** s'écrit : $c(4,2)$. Dans les exemples ci-dessous, les indicateurs de correspondance figurent entre les deux grandes parenthèses et
 15 permettent de déterminer l'existence des matrices de couplage non nulles :

$$\begin{array}{l}
 Q_{a_e}^{1_2}, \\
 M_{e_a}^{1_01}, Q_{c_a}^{1_01}
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 a(01,1) \\
 b(3,2) \\
 c(4,2) \\
 d(02,5) \\
 e(1,2) \\
 f(5,2)
 \end{array} \right\}
 \begin{array}{l}
 M_{b_c}^{2_4}, Q_{b_c}^{2_4}, \\
 M_{c_b}^{2_3}, Q_{c_b}^{2_3} \\
 \\
 M_{d_f}^{5_2}, Q_{d_f}^{5_2}, \\
 M_{f_d}^{5_02}, Q_{f_d}^{5_02}
 \end{array}$$

20

Les conditions aux limites de l'objet 2 sont alors :

$$\begin{aligned}
&\text{CLU en a, } Q_{a_a}^{1,01} \cdot Aa_{1,01} + Q_{a_e}^{1,2} \cdot Ae_{1,2} = Pa \\
&\text{CLI en b, } M_{b_b}^{3-2} \cdot Ab_{3,2} = M_{b_b}^{2,3} \cdot Ab_{2,3} + M_{b_v}^{2,4} \cdot Ac_{2,4} + M_{b_e}^{2,1} \cdot Ae_{2,1} + M_{b_f}^{2,5} \cdot Af_{2,5} \\
&\quad Q_{b_b}^{3-2} \cdot Ab_{3,2} = Q_{b_b}^{2,3} \cdot Ab_{2,3} + Q_{b_c}^{2,4} \cdot Ac_{2,4} + Q_{b_e}^{2,1} \cdot Ae_{2,1} + Q_{b_f}^{2,5} \cdot Af_{2,5} \\
&\text{CLI en c, } M_{c_c}^{4-2} \cdot Ac_{4,2} = M_{c_c}^{2,4} \cdot Ac_{2,4} + M_{c_b}^{2,3} \cdot Ab_{2,3} + M_{c_e}^{2,1} \cdot Ae_{2,1} + M_{c_f}^{2,5} \cdot Af_{2,5} \\
&\quad Q_{c_c}^{4-2} \cdot Ac_{4,2} = Q_{c_c}^{2,4} \cdot Ac_{2,4} + Q_{c_b}^{2,3} \cdot Ab_{2,3} + Q_{c_e}^{2,1} \cdot Ae_{2,1} + Q_{c_f}^{2,5} \cdot Af_{2,5} \\
&\text{CLU en d, } Q_{d_d}^{5,02} \cdot Ad_{5,02} + Q_{d_f}^{5,2} \cdot Af_{5,2} = Pd \\
&\text{CLI en e, } M_{e_e}^{1-2} \cdot Ae_{1,2} + M_{e_a}^{1,01} \cdot Aa_{1,01} = M_{e_e}^{2,1} \cdot Ae_{2,1} + M_{e_b}^{2,3} \cdot Ab_{2,3} + M_{e_c}^{2,4} \cdot Ac_{2,4} + M_{e_f}^{2,5} \cdot Af_{2,5} \\
&\quad Q_{e_e}^{1,2} \cdot Ae_{1,2} + Q_{e_a}^{1,01} \cdot Aa_{1,01} = Q_{e_e}^{2,1} \cdot Ae_{2,1} + Q_{e_b}^{2,3} \cdot Ab_{2,3} + Q_{e_c}^{2,4} \cdot Ac_{2,4} + Q_{e_f}^{2,5} \cdot Af_{2,5} \\
&\text{CLI en f, } M_{f_f}^{5-2} \cdot Af_{5,2} + M_{f_d}^{5,02} \cdot Ad_{5,02} = M_{f_f}^{2,5} \cdot Af_{2,5} + M_{f_c}^{2,4} \cdot Ac_{2,4} + M_{f_b}^{2,3} \cdot Ab_{2,3} + M_{f_e}^{2,1} \cdot Ae_{2,1} \\
&\quad Q_{f_f}^{5-2} \cdot Af_{5,2} + Q_{f_d}^{5,02} \cdot Ad_{5,02} = Q_{f_f}^{2,5} \cdot Af_{2,5} + Q_{f_c}^{2,4} \cdot Ac_{2,4} + Q_{f_b}^{2,3} \cdot Ab_{2,3} + Q_{f_e}^{2,1} \cdot Ae_{2,1}
\end{aligned} \tag{A1}$$

et l'équation matricielle correspondante est :

$$\begin{bmatrix} Pa \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ Pd \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{a_a}^{1,01} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{a_e}^{1,2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -Q_{b_b}^{3,2} & Q_{b_b}^{2,3} & Q_{b_c}^{2,4} & 0 & 0 & 0 & Q_{b_e}^{2,1} & 0 & Q_{b_f}^{2,5} \\ 0 & 0 & -M_{b_b}^{3,2} & M_{b_b}^{2,3} & M_{b_c}^{2,4} & 0 & 0 & M_{b_e}^{2,1} & 0 & M_{b_f}^{2,5} \\ 0 & 0 & 0 & Q_{c_b}^{2,3} & -Q_{c_c}^{4,2} & Q_{c_c}^{2,4} & 0 & Q_{c_e}^{2,1} & 0 & Q_{c_f}^{2,5} \\ 0 & 0 & 0 & M_{c_b}^{2,3} & -M_{c_c}^{4,2} & M_{c_c}^{2,4} & 0 & M_{c_e}^{2,1} & 0 & M_{c_f}^{2,5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{d_d}^{5,02} & 0 & 0 & Q_{d_f}^{5,2} & 0 \\ 0 & -Q_{e_a}^{1,01} & 0 & Q_{e_b}^{2,3} & Q_{e_c}^{2,4} & 0 & 0 & -Q_{e_e}^{1,2} & Q_{e_e}^{2,1} & 0 & Q_{e_f}^{2,5} \\ 0 & -M_{e_a}^{1,01} & 0 & M_{e_b}^{2,3} & M_{e_c}^{2,4} & 0 & 0 & -M_{e_e}^{1,2} & M_{e_e}^{2,1} & 0 & M_{e_f}^{2,5} \\ 0 & 0 & 0 & Q_{f_b}^{2,3} & Q_{f_c}^{2,4} & 0 & -Q_{f_d}^{5,02} & 0 & Q_{f_e}^{2,1} & -Q_{f_f}^{5,2} & Q_{f_f}^{2,5} \\ 0 & 0 & 0 & M_{f_b}^{2,3} & M_{f_c}^{2,4} & 0 & -M_{f_d}^{5,02} & 0 & M_{f_e}^{2,1} & -M_{f_f}^{5,2} & M_{f_f}^{2,5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Aa_{1,01} \\ Ab_{3,2} \\ Ab_{2,3} \\ Ac_{2,4} \\ Ac_{4,2} \\ Ad_{5,02} \\ Ae_{1,2} \\ Ae_{2,1} \\ Af_{5,2} \\ Af_{2,5} \end{bmatrix} \tag{A2}$$

5

On a représenté en figures 4 (vue simplifiée en perspective) et 5 (vue en coupe selon V-V de la figure 4) un exemple d'un système fermé 2.

Le système 2 comporte un tube 3 creux à section rectangulaire, que l'on appelé ici objet **a** et qui contient le milieu 1 ainsi que le milieu 2 (délimité par l'objet **b**). Des électrodes 4 et 5 sont appliquées sur deux faces opposées de l'objet **a**. Sur la coupe transversale de la figure 5, on a indiqué les différentes couches de sources ponctuelles : $Aa_{1,0}$ sur la face extérieure de l'objet **a**, $Ab_{2,1}$ et $Ab_{1,2}$ de chaque côté

de l'interface entre les milieux 1 et 2, respectivement dans le milieu 1 et dans le milieu 2. On remarquera qu'à l'endroit d'application des électrodes 4 et 5, les sources ponctuelles sont représentées différemment des autres, car ce sont des sources primaires qui indiquent la présence de surfaces actives. Le vecteur de CL \mathbf{Pa} contient donc des CLU et des CLI.

La matrice de couplage et les indicateurs de correspondance du système 2 s'écrivent :

$$\left. \begin{array}{c} a(0,1) \\ b(1,2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} M_{b-a}^{1,0}, Q_{b-a}^{1,0}, \\ Q_{a-b}^{1,2} \end{array}$$

10

Les conditions aux limites s'écrivent alors :

$$\text{CLU en a, } Q_{a-a}^{1,0} \cdot Aa_{1,0} + Q_{a-b}^{1,2} \cdot Ab_{1,2} = P_a$$

$$\text{CLI en b, } M_{b-b}^{2,1} \cdot Ab_{2,1} = M_{b-b}^{1,2} \cdot Ab_{1,2} + M_{b-a}^{1,0} \cdot Aa_{1,0}$$

$$Q_{b-b}^{2,1} \cdot Ab_{2,1} = Q_{b-b}^{1,2} \cdot Ab_{1,2} + Q_{b-a}^{1,0} \cdot Aa_{1,0}$$

15

$$\text{soit : } \begin{bmatrix} P_a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{a-a}^{1,0} & Q_{a-b}^{1,2} & 0 \\ Q_{b-a}^{1,0} & Q_{b-b}^{1,2} & -Q_{b-b}^{2,1} \\ M_{b-a}^{1,1} & M_{b-b}^{1,2} & -M_{b-b}^{2,1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Aa_{1,0} \\ Ab_{1,2} \\ Ab_{2,1} \end{bmatrix}$$

Les deux derniers exemples sont illustrés en figures 6 à 8. Il s'agit de deux variantes de réalisation de micro-condensateurs à capacité variable ou ajustable, tels que décrits respectivement dans : "V-shaped micromechanical tunable capacitor for RF applications", A. Cruau *et al*, DTIP2004, Montreux et dans "A high-Q tunable micromechanical capacitor with movable dielectric for RF applications", J-B. Yoon *et al*, Intl. EDM 2000, San Francisco. Seules leur particularités relatives à l'application du procédé de l'invention seront exposées ici.

25

La première variante, représentée en figure 6, comporte quatre jeux de trois électrodes, disposés chacun dans un plan. Ces quatre plans sont tous perpendiculaires à un plan commun (non représenté) et leurs intersections avec ce plan forment deux

« V » disposés l'un légèrement au-dessus de l'autre. Chaque jeu d'électrodes comporte trois électrodes identiques en forme de ruban rectangulaire, dont les grands axes sont parallèles entre eux et audit plan commun. Les électrodes de l'un des deux jeux du « V » intérieur sont en vis-à-vis de celles de l'autre jeu de ce « V »,
 5 et il en est de même pour les jeux d'électrodes du « V » extérieur. Les plans d'électrodes du « V » intérieur sont mobiles par rapport à ceux des plans du « V » extérieur, mais dans chaque « V », les deux jeux d'électrodes sont fixes l'un par rapport à l'autre.

On appelle objet **a** l'un des jeux d'électrodes (celui de gauche, tel que vu sur
 10 les dessin) , objet **b** les deux jeux d'électrodes du « V » intérieur, et objet **c** l'autre jeu d'électrodes du « V » extérieur. Bien entendu, les conditions aux limites sur chacune des électrodes sont fixées par les potentiels respectifs appliqués à ces électrodes. On appelle milieu 1 celui entourant toutes les électrodes. On appelle P_a , P_b et P_c les potentiels respectivement appliqués aux objets **a**, **b** et **c**.

15 Dans la variante représentée en figure 7, le condensateur variable comporte deux jeux d'électrodes disposés chacun dans un plan et un jeu de barreaux diélectriques, ces trois plans étant parallèles entre eux. Le jeu de barreaux diélectriques du plan intérieur est mobile par rapport aux deux autres jeux, qui sont fixes l'un par rapport à l'autre. Le jeu d'électrodes de l'un des plans extérieurs (le
 20 plan inférieur, tel que vu sur le dessin) est appelé objet **a**, celui du plan central objet **b** et celui de l'autre plan extérieur objet **c**. Tous ces éléments sont entourés par le milieu 1, et le diélectrique contient le milieu 2. Comme dans le cas de la variante de la figure 6, les conditions aux limites sur les électrodes du dispositif de la figure 7 sont fixées par les potentiels électriques qui leur sont appliqués. Les potentiels
 25 appliqués aux objets **a** et **c** sont également respectivement appelés P_a et P_c .

On a représenté en figure 8 les différentes sources ponctuelles sur les différents objets **a**, **b** et **c** .

Les conditions aux limites s'écrivent, pour la première variante (figure 6):

$$\text{CLU en a, } Q_{a_a}^{1,02} \cdot Aa_{1,02} + Q_{a_b}^{1,2} \cdot Ab_{1,2} + Q_{a_c}^{1,01} \cdot Ac_{1,01} = P_a$$

$$\text{CLU en b, } Q_{b_a}^{1,02} \cdot Aa_{1,02} + Q_{b_b}^{1,2} \cdot Ab_{1,2} + Q_{b_c}^{1,01} \cdot Ac_{1,01} = P_b$$

$$\text{CLU en c, } Q_{c_a}^{1,02} \cdot Aa_{1,02} + Q_{c_b}^{1,2} \cdot Ab_{1,2} + Q_{c_c}^{1,01} \cdot Ac_{1,01} = P_c$$

ce qui donne la matrice de couplage :

$$\begin{bmatrix} P_a \\ P_b \\ P_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{a_a}^{1,02} & Q_{a_b}^{1,2} & Q_{a_c}^{1,01} \\ Q_{b_a}^{1,02} & Q_{b_b}^{1,2} & Q_{b_c}^{1,01} \\ Q_{c_a}^{1,02} & Q_{c_b}^{1,2} & Q_{c_c}^{1,01} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Aa_{1,02} \\ Ab_{1,2} \\ Ac_{1,01} \end{bmatrix}$$

- 5 tandis que pour la deuxième variante (figure 7), les indicateurs de correspondance s'écrivent :

$$\left. \begin{array}{l} a(02,1) \\ b(1,2) \\ c((01,1)) \end{array} \right\} \begin{array}{l} M_{c_a}^{1,02}, Q_{c_a}^{1,02}, \\ M_{a_c}^{1,01}, Q_{a_c}^{1,01} \end{array}$$

10

les conditions aux limites sont :

$$\text{CLU en a, } Q_{a_a}^{1,02} \cdot Aa_{1,02} + Q_{a_b}^{1,2} \cdot Ab_{1,2} + Q_{a_c}^{1,01} \cdot Ac_{1,01} = P_a$$

$$\text{CLI en b, } M_{b_b}^{2-1} \cdot Ab_{2,1} = M_{b_b}^{1,2} \cdot Ab_{1,2} + M_{b_a}^{1,02} \cdot Aa_{1,02} + M_{b_c}^{1,01} \cdot Ac_{1,01}$$

$$Q_{b_b}^{2-1} \cdot Ab_{2,1} = Q_{b_b}^{1,2} \cdot Ab_{1,2} + Q_{b_a}^{1,02} \cdot Aa_{1,02} + Q_{b_c}^{1,01} \cdot Ac_{1,01}$$

$$\text{CLU en c, } Q_{c_a}^{1,02} \cdot Aa_{1,02} + Q_{c_b}^{1,2} \cdot Ab_{1,2} + Q_{c_c}^{1,01} \cdot Ac_{1,01} = P_c$$

- 15 On remarquera que pour ces CL, 01 et 02 représentent l'intérieur des électrodes et sont extérieurs à l'espace de travail.

Pour cette deuxième variante, la matrice de couplage est :

$$\begin{bmatrix} P_a \\ 0 \\ 0 \\ P_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{a_a}^{1,02} & Q_{a_b}^{1,2} & 0 & Q_{a_c}^{1,01} \\ M_{b_a}^{1,02} & M_{b_b}^{1,2} & -M_{b_b}^{2,1} & M_{b_c}^{1,01} \\ Q_{b_a}^{1,02} & Q_{b_b}^{1,2} & -Q_{b_b}^{2,1} & Q_{b_c}^{1,01} \\ Q_{c_a}^{1,02} & Q_{c_b}^{1,2} & 0 & Q_{c_c}^{1,01} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Aa_{1,02} \\ Ab_{1,2} \\ Ab_{2,1} \\ Ac_{1,01} \end{bmatrix}$$

On remarquera que dans le premier cas, la matrice Q_{ac} , et dans ce dernier cas, les matrices M_{ac} (Q_{ac}) et M_{ca} (Q_{ca}), sont partiellement masquées car l'objet **b** fait écran partiellement entre les objets **a** et **c**.

5 On va décrire ci-dessous un mode de mise en œuvre du procédé de l'invention dans le cadre de l'électromagnétisme, et plus particulièrement dans le domaine des courants de Foucault, lorsque le système possède plusieurs domaines.

Au passage de chaque interface, la conservation des composantes vectorielles des champs impose :

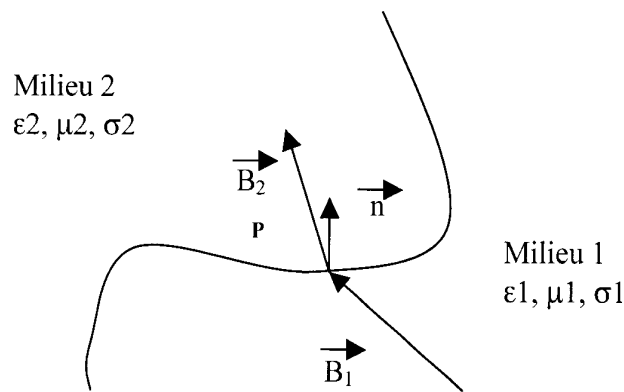
- 10 ▪ la continuité de la composante normale de \vec{B} .
- la continuité de la composante tangentielle de \vec{H} .
- la continuité de la composante normale de \vec{D} .
- la continuité de la composante tangentielle de \vec{E} .

15 Soit, dans le cas où les deux milieux de part et d'autre de l'interface sont appelés 1 et 2 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{B}_{n1} = \vec{B}_{n2} \\ \vec{H}_{t1} = \vec{H}_{t2} \\ \vec{D}_{n1} = \vec{D}_{n2} \\ \vec{E}_{t1} = \vec{E}_{t2} \end{array} \right.$$

Avec $\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$ et $\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E}$, les vecteurs \vec{B} et \vec{E} étant respectivement notés \vec{B}_1 et \vec{B}_2 d'une part, et \vec{E}_1 et \vec{E}_2 d'autre part, dans les milieux 1 et 2.

20 En chaque point test P de l'interface, il existe un vecteur \vec{n} normal à cette interface.



On définit $\vec{B}n1$ comme la composante de $\vec{B}1$ dans la direction du vecteur \vec{n} , ce qui s'écrit :

$$5 \quad \vec{B}n1 = \vec{n} \cdot (\vec{n}^T \cdot \vec{B}1) = (\vec{n} \cdot \vec{n}^T) \cdot \vec{B}1 = \vec{n} \cdot \vec{n}^T \cdot \vec{B}1$$

Où \vec{n}^T représente la matrice transposée de \vec{n} .

La continuité de $\vec{B}n$ au passage de l'interface s'écrit donc :

$$\vec{B}n1 = \vec{B}n2 \Rightarrow (\vec{n} \cdot \vec{n}^T) \cdot \vec{B}1 = (\vec{n} \cdot \vec{n}^T) \cdot \vec{B}2 \Rightarrow [N1] \cdot \vec{B}1 = [N2] \cdot \vec{B}2$$

On calcule la composante tangentielle $\vec{B}t1$ de $\vec{B}1$ comme la différence vectorielle entre $\vec{B}1$ et $\vec{B}n1$. La relation $\vec{B}1 = \mu \cdot \vec{H}1$ devient :

$$10 \quad \vec{H}t1 = \frac{\vec{B}t1}{\mu1} = \frac{\vec{B}1 - \vec{B}n1}{\mu1} = \frac{\vec{B}1 - \vec{n} \cdot \vec{n}^T \cdot \vec{B}1}{\mu1} = \frac{(I - \vec{n} \cdot \vec{n}^T) \cdot \vec{B}1}{\mu1} \quad \text{avec } I \text{ matrice}$$

identité.

La continuité de $\vec{H}t$ au passage de l'interface s'écrit donc :

$$15 \quad \vec{H}t1 = \vec{H}t2 \Rightarrow \frac{(I - \vec{n} \cdot \vec{n}^T) \cdot \vec{B}1}{\mu1} = \frac{(I - \vec{n} \cdot \vec{n}^T) \cdot \vec{B}2}{\mu2} \Rightarrow [T1] \cdot \vec{B}1 = [T2] \cdot \vec{B}2$$

On calcule $\vec{E}n1$ et $\vec{E}t1$ en suivant le même raisonnement.

A l'aide des composantes précédentes, on construit les vecteurs tests chargés de vérifier les conditions de continuité au point P, ce qui s'écrit pour l'induction magnétique \vec{B} :

$$\left[\frac{(I - \vec{n} \cdot \vec{n}^T)}{\mu_1} + \vec{n} \cdot \vec{n}^T \right] \cdot \vec{B}_1 = \left[\frac{(I - \vec{n} \cdot \vec{n}^T)}{\mu_2} + \vec{n} \cdot \vec{n}^T \right] \cdot \vec{B}_2$$

Par la suite, on appellera vecteur test un vecteur projeté en utilisant un projecteur $[\Omega]$, ce qui revient à écrire :

$$5 \quad [\Omega_1^B] \cdot \vec{B}_1 = [\Omega_2^B] \cdot \vec{B}_2 \Leftrightarrow \vec{B}_{1_TEST} = \vec{B}_{2_TEST}$$

Avec :

$$\begin{cases} [\Omega_1^B] = \vec{n} \cdot \vec{n}^T + \frac{(I - \vec{n} \cdot \vec{n}^T)}{\mu_1} \\ [\Omega_2^B] = \vec{n} \cdot \vec{n}^T + \frac{(I - \vec{n} \cdot \vec{n}^T)}{\mu_2} \end{cases}$$

10 De même, pour \vec{E} , on définit deux opérateurs de projections Ω_1^E et Ω_2^E qui conduisent à :

$$\begin{aligned} [(I - \vec{n} \cdot \vec{n}^T) + \varepsilon_1 \cdot (\vec{n} \cdot \vec{n}^T)] \cdot \vec{E}_1 &= [(I - \vec{n} \cdot \vec{n}^T) + \varepsilon_2 \cdot (\vec{n} \cdot \vec{n}^T)] \cdot \vec{E}_2 \\ \Leftrightarrow [\Omega_1^E] \cdot \vec{E}_1 &= [\Omega_2^E] \cdot \vec{E}_2 \Leftrightarrow \vec{E}_{1_TEST} = \vec{E}_{2_TEST} \end{aligned}$$

15 Prenons l'exemple où le système ne comporte que des couches placées parallèlement au plan (x0y), et où le vecteur normal \vec{n} est égal à \vec{z} .

$$\text{Ainsi, } \vec{n} \cdot \vec{n}^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (0 \ 0 \ 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Et :

$$I - \vec{n} \cdot \vec{n}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'équation de \vec{B} s'écrit dans cet exemple :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\mu_1} bx_1 \\ \frac{1}{\mu_1} by_1 \\ bz_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu_2} bx_2 \\ \frac{1}{\mu_2} by_2 \\ bz_2 \end{pmatrix}$$

Et l'équation sur \vec{E} :

$$\begin{pmatrix} ex_1 \\ ey_1 \\ \varepsilon_1 \cdot ez_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ex_2 \\ ey_2 \\ \varepsilon_2 \cdot ez_2 \end{pmatrix}$$

- On retrouve les résultats classiques en électromagnétisme de conservation des
5 grandeurs vectorielles au passage d'une interface.

Il reste à déterminer les champs \vec{B} et \vec{E} , par l'intermédiaire du potentiel vecteur électrique \vec{A} .

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \iiint_v \vec{J}(\vec{r}') \cdot G(R) \cdot dv$$

- 10 avec $G(R) = \frac{e^{-jkR}}{4\pi R}$ et $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ et $R = \|\vec{R}\|$ et $k_i^2 = \varepsilon_i \mu_i \omega^2 - j\omega \sigma_i \mu_i$

Le vecteur \vec{J} représente le vecteur densité de courant, composé, selon le procédé de l'invention, d'une somme finie de N_s sources ponctuelles :

$$\vec{J}(\vec{r}') = \sum_{i=1}^{N_s} J_i \cdot \delta(\vec{r}' - \vec{r}_i)$$

- 15 Si on remplace cette expression dans celle du potentiel vecteur, on peut écrire :

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \sum_{i=1}^{N_s} J_i \cdot \iiint_v G(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \delta(\vec{r}' - \vec{r}_i) dv = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \sum_{i=1}^{N_s} J_i \cdot G(\vec{r} - \vec{r}_i)$$

Dans le repère cartésien (x,y,z),

$$\vec{A}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \sum_i J_x i \cdot \frac{e^{-jkR}}{4\pi \cdot R} \cdot dx \\ \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \sum_i J_y i \cdot \frac{e^{-jkR}}{4\pi \cdot R} \cdot dy \\ \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \sum_i J_z i \cdot \frac{e^{-jkR}}{4\pi \cdot R} \cdot dz \end{cases}$$

Le procédé DPSM calcule la contribution de chacune des sources ponctuelles aux points tests P. Pour un exemple comportant Np points tests, la formulation du potentiel vecteur électrique \vec{A} s'écrit alors :

$$5 \quad \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \begin{bmatrix} \frac{e^{-jkR_{11}}}{4\pi \cdot R_{11}} & \dots & \dots & \frac{e^{-jkR_{1Ns}}}{4\pi \cdot R_{1Ns}} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{e^{-jkR_{Np1}}}{4\pi \cdot R_{Np1}} & \dots & \dots & \frac{e^{-jkR_{NpNs}}}{4\pi \cdot R_{NpNs}} \end{bmatrix} \cdot \vec{J}$$

$$\vec{A} = [W_A] \cdot \vec{J}$$

$$\text{On sait que } \vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \text{ et que } \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{bmatrix}$$

10

Donc :

$$\vec{A}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \sum_i J_x i \cdot \frac{e^{-jkR}}{4\pi \cdot R} \cdot dx \\ \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \sum_i J_y i \cdot \frac{e^{-jkR}}{4\pi \cdot R} \cdot dy \\ \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \sum_i J_z i \cdot \frac{e^{-jkR}}{4\pi \cdot R} \cdot dz \end{cases} \Leftrightarrow \frac{4\pi}{\mu_0} \cdot \vec{A} = \sum_{i=1}^{Ns} \begin{cases} J_x i \cdot \frac{e^{-jkR}}{4\pi \cdot R} \cdot dx \\ J_y i \cdot \frac{e^{-jkR}}{4\pi \cdot R} \cdot dy \\ J_z i \cdot \frac{e^{-jkR}}{4\pi \cdot R} \cdot dz \end{cases}$$

En posant :

$$\vec{R} \begin{vmatrix} x - Cxi \\ y - Cyi \\ z - Czi \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \|\vec{R}\| = R = \sqrt{(X - Cxi)^2 + (y - Cyi)^2 + (z - Czi)^2}$$

Avec les coordonnées des sources ponctuelles notées matriciellement
5 (Cxi, Cyi, Czi) et les coordonnées des points test P notées matriciellement
 (X, Y, Z) .

Soient les coordonnées du rotationnel de \vec{A} , alors :

$$\frac{4\pi}{\mu_0} \cdot \text{rot } \vec{A} = \begin{vmatrix} \text{rotAx} \\ \text{rotAy} \\ \text{rotAz} \end{vmatrix}$$

10 Avec :

$$\text{rotAx} = \frac{\partial Az}{\partial y} - \frac{\partial Ay}{\partial z} \quad \text{rotAy} = \frac{\partial Ax}{\partial z} - \frac{\partial Az}{\partial x} \quad \text{rotAz} = \frac{\partial Ay}{\partial x} - \frac{\partial Ax}{\partial y}$$

Calculons les différentes dérivées partielles, pour la source i, en tenant compte de :

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{y - Cy}{R} \quad \text{et} \quad \frac{\partial(e^{-jkR})}{\partial y} = \frac{-ik \cdot (y - Cy) \cdot e^{-jkR}}{R}$$

15

Donc :

$$\frac{\partial Az}{\partial y} = \frac{Jz \cdot e^{-jkR}}{R^2} \left[-j \cdot y \cdot k - \frac{y}{R} \right] = (y - Cy) \cdot Jz \cdot \alpha$$

$$\frac{\partial Ay}{\partial z} = \frac{Jy \cdot e^{-jkR}}{R^2} \left[-j \cdot z \cdot k - \frac{z}{R} \right] = (z - Cz) \cdot Jy \cdot \alpha$$

20

$$\text{Avec } \alpha = -\frac{e^{-jkR}}{R^2} \left[j \cdot k + \frac{1}{R} \right]$$

Donc pour $\text{rot}Ax$, on a :

$$\text{rot}Ax = \alpha.(z.Jy - y.Jz)$$

De même, pour $\text{rot}Ay$ et $\text{rot}Az$:

$$\text{rot}Ay = \alpha.(x.Jz - z.Jx) \text{ et } \text{rot}Az = \alpha.(z.Jy - y.Jz)$$

5

$$\text{Au final, } \vec{B} = \begin{cases} \frac{\alpha.\mu_0}{4\pi} .[-(z - Cz).Jy + (y - Cy).Jz] \\ \frac{\alpha.\mu_0}{4\pi} .[-(x - Cx).Jz + (z - Cz).Jx] \\ \frac{\alpha.\mu_0}{4\pi} .[-(y - Cy).Jx + (x - Cx).Jy] \end{cases}$$

$$\text{toujours avec } \alpha = -\frac{e^{-jk.R}}{R^2} \left[j.k + \frac{1}{R} \right]$$

10 On détermine \vec{E} par la formule $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

En résumé, on a vu comment exprimer les vecteurs test \vec{B}_{TEST} et \vec{E}_{TEST} en fonction de \vec{B} et \vec{E} grâce à l'utilisation des projecteurs $[\Omega]$. Ces relations permettent d'exprimer matriciellement \vec{B}_{TEST} et \vec{E}_{TEST} en fonction de \vec{A} , donc en fonction de \vec{J} :

$$15 \quad \begin{cases} [\vec{B}]_{TEST} = [M] \cdot [\vec{J}] \\ [\vec{E}]_{TEST} = [Q] \cdot [\vec{J}] \end{cases}$$

Où les matrices $[M]$ et $[Q]$ dépendent de la géométrie et de la physique du problème.

Conformément à l'invention, on peut établir, pour un système comportant plusieurs objets, la matrice globale de ce système, et ainsi trouver toutes les composantes du vecteur source \vec{J} . On peut calculer en tout point d'observation du système les grandeurs physiques représentatives des interactions du sein du système. On remarquera que pour cette application à l'électromagnétisme, le nombre de

20

paramètres inconnus des sources par maille est égal au nombre d'équations disponibles (six, en l'occurrence).

Par exemple, dans le cas de la figure 2, le système décrit pourrait être un objet conducteur composé des milieux stratifiés 1,2 et 5, placé face à un champ d'excitation créé par l'objet d, les objets b ou c pouvant représenter une fissure ou une inclusion.

Remarque sur les jauges : les équations de Maxwell étant des équations intégrales, les champs \vec{B} et \vec{E} sont déterminés à partir de \vec{A} à une constante près appelée jauge. La divergence d'un rotationnel est toujours nulle, il en découle que $\vec{B} = \overrightarrow{rot} \vec{A}$. Et comme le rotationnel du gradient d'une fonction Θ est toujours nul, on peut ajouter un terme de gradient à \vec{A} . Le champ \vec{E} devient alors :

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \overrightarrow{grad} \Theta$$

On montre que la divergence de \vec{A} peut être choisie arbitrairement. Une condition appelée jauge permet alors de déterminer complètement \vec{A} . On utilise couramment les jauges dites jauge de Coulomb, ou encore jauge de Lorentz. D'autres conditions sur le potentiel coexistent.

Dans le cas de la méthode DPSM, si l'utilisateur souhaite vérifier une condition de jauge particulière, alors l'ajout d'une source ponctuelle supplémentaire permet de caractériser complètement le système, et de lever toute incertitude sur le potentiel.

On va décrire ci-dessous un mode de mise en œuvre du procédé de l'invention en référence à un contrôle non destructif par ultrasons, mais il est bien entendu que l'invention n'est pas limitée à cette seule application, et qu'elle peut être mise en œuvre dans toutes les applications mettant en œuvre des phénomènes de propagation d'ondes dans des milieux comportant au moins une interface, dans des domaines très variés tels que l'électromagnétisme, la magnétostatique, l'acoustique, l'optique, la géophysique, les courants de Foucault, la thermique, etc.

Les principes de base du procédé de modélisation de milieux non homogènes conforme à l'invention sont décrits ci-dessous en référence aux figures 9 à 19.

On a représenté en figure 9 un système 6 comportant deux transducteurs T et S disposés de part et d'autre d'un ensemble non homogène, c'est-à-dire comportant

plusieurs objets et milieux différents. On va d'abord supposer que ces milieux sont des couches planes de propriétés et/ou de matériaux différents (différents entre couches adjacentes, chaque couche étant supposée homogène dans sa composition et ses propriétés), le système 6 étant alors qualifié de multicouches. Comme précisé ci-

5 dessus, ces transducteurs sont, dans le cas présent, des sondes ultrasonores. On suppose que ce^e système 6 est constitué de n couches planes de milieux différents, référencées C_1 à C_n et séparés par $(n-1)$ interfaces référencées I_1 à I_{n-1} . Pour simplifier les explications, on a représenté des transducteurs dont les faces actives (en vis-à-vis du système 6) sont planes et parallèles aux interfaces, mais il est bien entendu que

10 l'invention peut également être mise en œuvre lorsque ces faces actives ne sont pas parallèles aux interfaces. Une couche de source, appelée source primaire, modélise un transducteur, et une interface est modélisée par deux couches de sources, appelées sources secondaires.

A partir de la configuration de la figure 9, et en mettant en œuvre l'extension

15 de la DPSM aux systèmes multicouches selon la présente invention, on a représenté en figure 10 deux couches de sources primaires A_S et A_T qui modélisent les deux transducteurs S et T , et $2(n-1)$ couches de sources secondaires relatives aux $(n-1)$ interfaces. Ces sources ont été représentées sous forme de petits cercles tangents aux interfaces correspondantes. De chaque côté de chaque interface, on répartit sur la

20 face entière de cette interface une couche de sources secondaires. Ainsi, par exemple pour la première interface I_1 , on répartit des sources A^*_1 sur la face de l'interface en vis-à-vis du transducteur S et des sources A_1 sur l'autre face, et ainsi de suite jusqu'à l'interface de rang n , comportant des sources A^*_{n-1} sur sa face en vis-à-vis de l'interface de rang $(n-1)$ et des sources A_{n-1} sur sa face en vis-à-vis du transducteur T .

25 Pour la clarté du dessin, on n'a représenté qu'une partie de ces sources primaires et secondaires. On appelle A_S et A_T les vecteurs contenant les valeurs des sources ponctuelles qu'on appellera par la suite vecteurs sources. Sur chaque face de chaque interface de rang l à n , on a représenté un ensemble de vecteurs sources secondaires A_m (pour la face supérieure de chaque interface, telle que vue sur le dessin) et A^*_m

30 (pour la face inférieure de chaque interface).

Le champ ultrasonore total dans chaque milieu plan du système 6 est obtenu

par superposition des vecteurs générés par les deux ensembles de sources situées juste au-dessus et juste au-dessous du milieu considéré. Ainsi, ce vecteur total est calculé, pour les différents milieux de la façon suivante :

- 5 Milieu C_1 : Sommation des champs générés par A_S et A_I
 Milieu C_2 : Sommation des champs générés par $A_{I_1}^*$ et A_2
 Milieu C_3 : Sommation des champs générés par $A_{I_2}^*$ et A_3

 Milieu $C_{(n-1)}$: Sommation des champs générés par $A_{I_{n-2}}^*$ et A_{n-1}
 Milieu C_n : Sommation des champs générés par $A_{I_{n-1}}^*$ et A_T

10 On va maintenant examiner quelles conditions aux limites et aux interfaces doivent être satisfaites afin de pouvoir déterminer les valeurs du vecteur source. Sur les faces actives des transducteurs S et T, l'utilisateur impose en chaque point des valeurs de vitesse respectivement regroupées dans des vecteurs vitesse appelés V_{SO} et V_{TO} respectivement (et qui sont des CLU). Au passage des (n-1) interfaces, la
 15 pression P et la composante de vitesse V selon la direction localement perpendiculaire aux plans des interfaces, et qui sera simplement appelée vitesse V par la suite, doivent être continues pour des raisons tenant à la physique ultrasonore (CLI). Il en serait de même pour les conditions de continuité de grandeurs dans
 20 d'autres domaines physiques, pour lesquels les grandeurs P et V représenteraient d'autres paramètres, qui pourraient ne pas être une pression et une vitesse.

Les termes V et P sont liés au vecteur source élémentaire A par les relations $V=M.A$ et $P=Q.A$, dans lesquelles M et Q sont des matrices de couplage des objets qui interagissent dans le même milieu. La matrice Q caractérise une grandeur scalaire (une pression acoustique dans le cas d'ondes ultrasonores, un potentiel scalaire
 25 électrique en électrostatique, ou bien un potentiel scalaire magnétique en magnétostatique), tandis que la matrice M caractérise une grandeur vectorielle (vitesse de propagation des ondes ultrasonores dans le présent exemple, champ électrique en électrostatique, ou champ magnétique en magnétostatique). Les conditions aux limites et de continuité entraînent les relations suivantes :

30

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_{SS}\mathbf{A}_S + \mathbf{M}_{S1}\mathbf{A}_1 &= \mathbf{V}_{S0} \\
\mathbf{M}_{TT}\mathbf{A}_T + \mathbf{M}_{T(n-1)}^*\mathbf{A}_{n-1} &= \mathbf{V}_{T0} \\
\mathbf{M}_{1S}\mathbf{A}_S + \mathbf{M}_{11}\mathbf{A}_1 &= \mathbf{M}_{12}\mathbf{A}_2 + \mathbf{M}_{11}^*\mathbf{A}_1^* \\
\mathbf{Q}_{1S}\mathbf{A}_S + \mathbf{Q}_{11}\mathbf{A}_1 &= \mathbf{Q}_{12}\mathbf{A}_2 + \mathbf{Q}_{11}^*\mathbf{A}_1^* \\
\mathbf{M}_{21}^*\mathbf{A}_1^* + \mathbf{M}_{22}\mathbf{A}_2 &= \mathbf{M}_{22}^*\mathbf{A}_2^* + \mathbf{M}_{23}\mathbf{A}_3 \\
\mathbf{Q}_{21}^*\mathbf{A}_1^* + \mathbf{Q}_{22}\mathbf{A}_2 &= \mathbf{Q}_{22}^*\mathbf{A}_2^* + \mathbf{Q}_{23}\mathbf{A}_3 \\
&\vdots \\
&\vdots \\
&\vdots \\
\mathbf{M}_{(n-2)(n-3)}^*\mathbf{A}_{(n-3)}^* + \mathbf{M}_{(n-2)(n-2)}\mathbf{A}_{(n-2)} &= \mathbf{M}_{(n-2)(n-2)}^*\mathbf{A}_{(n-2)}^* + \mathbf{M}_{(n-2)(n-1)}\mathbf{A}_{n-1} \\
\mathbf{Q}_{(n-2)(n-3)}^*\mathbf{A}_{(n-3)}^* + \mathbf{Q}_{(n-2)(n-2)}\mathbf{A}_{(n-2)} &= \mathbf{Q}_{(n-2)(n-2)}^*\mathbf{A}_{(n-2)}^* + \mathbf{Q}_{(n-2)(n-1)}\mathbf{A}_{(n-1)} \\
\mathbf{M}_{(n-1)(n-2)}^*\mathbf{A}_{(n-2)}^* + \mathbf{M}_{(n-1)(n-1)}\mathbf{A}_{(n-1)} &= \mathbf{M}_{(n-1)(n-1)}^*\mathbf{A}_{(n-1)}^* + \mathbf{M}_{(n-1)T}\mathbf{A}_T \\
\mathbf{Q}_{(n-1)(n-2)}^*\mathbf{A}_{(n-2)}^* + \mathbf{Q}_{(n-1)(n-1)}\mathbf{A}_{(n-1)} &= \mathbf{Q}_{(n-1)(n-1)}^*\mathbf{A}_{(n-1)}^* + \mathbf{Q}_{(n-1)T}\mathbf{A}_T
\end{aligned} \tag{1}$$

Ces équations peuvent être représentées sous forme matricielle, en écrivant les valeurs en indice $(n-j)$ sous la forme $nj, j = 1, 2, 3, \dots$, comme suit :

5

$$\begin{bmatrix}
\mathbf{M}_{SS} & \mathbf{M}_{S1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\mathbf{M}_{1S} & \mathbf{M}_{11} & -\mathbf{M}_{11}^* & -\mathbf{M}_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\mathbf{Q}_{1S} & \mathbf{Q}_{11} & -\mathbf{Q}_{11}^* & -\mathbf{Q}_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \mathbf{M}_{21}^* & \mathbf{M}_{22} & -\mathbf{M}_{22}^* & -\mathbf{M}_{23} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \mathbf{Q}_{21}^* & \mathbf{Q}_{22} & -\mathbf{Q}_{22}^* & -\mathbf{Q}_{23} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{M}_{32}^* & \mathbf{M}_{33} & -\mathbf{M}_{33}^* & -\mathbf{M}_{34} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{Q}_{32}^* & \mathbf{Q}_{33} & -\mathbf{Q}_{33}^* & -\mathbf{Q}_{34} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{M}_{n2n3}^* & \mathbf{M}_{n2n2} & -\mathbf{M}_{n2n2}^* & \mathbf{M}_{n2n1} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{Q}_{n2n3}^* & \mathbf{Q}_{n2n2} & -\mathbf{Q}_{n2n2}^* & \mathbf{Q}_{n2n1} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \mathbf{M}_{n1n2}^* & \mathbf{M}_{n1n1} & -\mathbf{M}_{n1n1}^* & \mathbf{M}_{n1T} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \mathbf{Q}_{n1n2}^* & \mathbf{Q}_{n1n1} & -\mathbf{Q}_{n1n1}^* & \mathbf{Q}_{n1T} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{M}_{Tn1}^* & \mathbf{M}_{TT}
\end{bmatrix}$$

$$\times \begin{Bmatrix} \mathbf{A}_S \\ \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_1^* \\ \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_2^* \\ \mathbf{A}_3 \\ \mathbf{A}_3^* \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \mathbf{A}_{n2} \\ \mathbf{A}_{n2}^* \\ \mathbf{A}_{n1} \\ \mathbf{A}_{n1}^* \\ \mathbf{A}_T \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{V}_{S0} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{V}_{T0} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

Cette matrice peut être écrite sous la forme symbolique :

$$\begin{aligned} 5 \quad & [\mathbf{M}]\{\mathbf{A}\} = \{\mathbf{V}_0\} \\ & \Rightarrow \{\mathbf{A}\} = [\mathbf{M}]^{-1}\{\mathbf{V}_0\} \end{aligned} \quad (3)$$

On peut ainsi obtenir le vecteur $\{\mathbf{A}\}$ qui regroupe l'ensemble des sources primaires et secondaires et qui est appelé vecteur source global.

On va maintenant examiner le cas où les faces actives des transducteurs sont appliquées sur les interfaces extrêmes de l'objet qui leur font face. On considère
 10 $(n+1)$ interfaces (I_0, I_1, \dots, I_n) séparant $(n+2)$ couches de milieux différents, ces couches ayant des rangs numérotés $(0, 1, 2, \dots, n, n+1)$. Les faces actives des transducteurs S et T sont appliquées respectivement sur les interfaces inférieure (I_0) et supérieure (I_n) de l'objet 1, comme représenté en figure 11. Ces deux interfaces délimitent respectivement un demi-espace inférieur et un demi-espace supérieur. Le
 15 milieu de rang 0 est au contact de l'interface I_0 , tandis que le milieu de rang $n+1$ est au contact de l'interface I_n . Comme expliqué ci-dessus à propos du procédé de l'invention, on répartit des couches de sources de chaque côté des $n+1$ interfaces I_0, I_1, \dots, I_n . Ces deux couches de vecteurs sources sont notés \mathbf{A}_m (pour les sources situées

au-dessus des interfaces) et A_m^* (pour les sources situées au-dessous des interfaces), avec $0 < m < n$. Cependant, les première (I_0) et dernière (I_n) interfaces sont adjacentes à trois couches de sources différentes. En effet, les deux ensembles de sources supplémentaires A_S et A_T sont dus au fait que les faces actives des transducteurs sont appliquées, par hypothèse, contre ces première et dernière interfaces. Bien que l'interface I_0 coïncide avec la face active du transducteur S, on considérera ici, pour l'exposé du procédé de l'invention, I_0 et S comme deux interfaces différentes. I_0 représente la région passive (dépourvue de source d'énergie) et S la région active (une source d'énergie y est présente). De la même façon, on considérera I_n et T comme deux interfaces différentes. Ainsi, dans le cas exposé ici, il y a $n+1$ interfaces passives I_0, I_1, \dots, I_n de chaque côté desquelles est disposé un ensemble de sources, et seulement deux surfaces actives S et T qui correspondent respectivement aux deux ensembles de sources supplémentaires A_S et A_T .

Les champs ultrasonores dans tous les milieux, sauf les deux milieux extrêmes, sont obtenus en superposant les champs produits par deux ensembles de sources, comme noté ci-dessous :

Milieu 2: Sommation des champs produits par A_1^* et A_2 .

Milieu 3: Sommation des champs produits par A_2^* et A_3 .

.....

.....

Milieu $n-1$: Sommation des champs produits par A_{n-2}^* et A_{n-1} .

Cependant, dans chaque demi-espace au-dessus de l'interface I_n et en dessous de l'interface I_0 , le champ ultrasonore n'est produit que par une seule couche de sources :

Milieu 0: le champ est produit par les sources A_0 .

Milieu $n+1$: le champ est produit par les sources A_n^* .

Dans les milieux supérieur et inférieur (milieux de rangs 1 et n) le champ est produit par trois couches de sources :

Milieu 1: Sommation des champs produits par A_0^* , A_1 et A_S .

Milieu n : Sommation des champs produits par A_{n-1}^* et A_n et A_T .

Pour déterminer la valeur des sources à partir des conditions aux limites et aux interfaces, il faut d'abord satisfaire les conditions aux interfaces suivantes. Au passage des n-1 interfaces passives intermédiaires (I_1, I_2, \dots, I_n), la pression ultrasonore P et la vitesse V dans la direction localement normale aux plans des interfaces doivent être continues..

Si l'on exclut les surfaces actives S et T, les interfaces I_0 et I_n ne sont adjacentes qu'à des zones passives. Au passage de ces interfaces passives, la pression P et la vitesse V doivent être continues, comme au passage des autres n-1 interfaces passives.

Sur les faces S et T des transducteurs, les vecteurs vitesse \mathbf{V} sont respectivement notés \mathbf{V}_{S0} et \mathbf{V}_{T0} . Etant donné que, comme précisé ci-dessus, $\mathbf{V}=\mathbf{M}\cdot\mathbf{A}$ et $\mathbf{P}=\mathbf{Q}\cdot\mathbf{A}$, les conditions de continuité et les conditions aux limites (CLU et CLI) donnent les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_{0S}\mathbf{A}_S + \mathbf{M}_{00}^*\mathbf{A}_0^* + \mathbf{M}_{01}\mathbf{A}_1 &= \mathbf{V}_{S0} && \text{sur } S \\
 \mathbf{M}_{0S}\mathbf{A}_S + \mathbf{M}_{00}^*\mathbf{A}_0^* + \mathbf{M}_{01}\mathbf{A}_1 &= \mathbf{M}_{00}\mathbf{A}_0 && \text{sur } I_0 \\
 \mathbf{Q}_{0S}\mathbf{A}_S + \mathbf{Q}_{00}^*\mathbf{A}_0^* + \mathbf{Q}_{01}\mathbf{A}_1 &= \mathbf{Q}_{00}\mathbf{A}_0 && \text{sur } I_0 \\
 \mathbf{M}_{1S}\mathbf{A}_S + \mathbf{M}_{10}^*\mathbf{A}_0^* + \mathbf{M}_{11}\mathbf{A}_1 &= \mathbf{M}_{11}^*\mathbf{A}_1^* + \mathbf{M}_{12}\mathbf{A}_2 && \text{sur } I_1 \\
 \mathbf{Q}_{1S}\mathbf{A}_S + \mathbf{Q}_{10}^*\mathbf{A}_0^* + \mathbf{Q}_{11}\mathbf{A}_1 &= \mathbf{Q}_{11}^*\mathbf{A}_1^* + \mathbf{Q}_{12}\mathbf{A}_2 && \text{sur } I_1 \\
 \mathbf{M}_{21}^*\mathbf{A}_1^* + \mathbf{M}_{22}\mathbf{A}_2 &= \mathbf{M}_{22}^*\mathbf{A}_2^* + \mathbf{M}_{23}\mathbf{A}_3 && \text{sur } I_2 \\
 \mathbf{Q}_{21}^*\mathbf{A}_1^* + \mathbf{Q}_{22}\mathbf{A}_2 &= \mathbf{Q}_{22}^*\mathbf{A}_2^* + \mathbf{Q}_{23}\mathbf{A}_3 && \text{sur } I_2 \\
 & \dots && \\
 & \dots && \\
 \mathbf{M}_{(n-1)(n-2)}^*\mathbf{A}_{(n-2)}^* + \mathbf{M}_{(n-1)(n-1)}\mathbf{A}_{(n-1)} &= \mathbf{M}_{(n-1)(n-1)}^*\mathbf{A}_{(n-1)}^* + \mathbf{M}_{(n-1)n}\mathbf{A}_n + \mathbf{M}_{(n-1)T}\mathbf{A}_T && \text{sur } I_{n-1} \\
 \mathbf{Q}_{(n-1)(n-2)}^*\mathbf{A}_{(n-2)}^* + \mathbf{Q}_{(n-1)(n-1)}\mathbf{A}_{(n-1)} &= \mathbf{Q}_{(n-1)(n-1)}^*\mathbf{A}_{(n-1)}^* + \mathbf{Q}_{(n-1)n}\mathbf{A}_n + \mathbf{Q}_{(n-1)T}\mathbf{A}_T && \text{sur } I_{n-1} \\
 \mathbf{M}_{n(n-1)}^*\mathbf{A}_{(n-1)}^* + \mathbf{M}_{nn}\mathbf{A}_n + \mathbf{M}_{nT}\mathbf{A}_T &= \mathbf{M}_{nn}^*\mathbf{A}_n^* && \text{sur } I_n \\
 \mathbf{Q}_{n(n-1)}^*\mathbf{A}_{(n-1)}^* + \mathbf{Q}_{nn}\mathbf{A}_n + \mathbf{Q}_{nT}\mathbf{A}_T &= \mathbf{Q}_{nn}^*\mathbf{A}_n^* && \text{sur } I_n \\
 \mathbf{M}_{n(n-1)}^*\mathbf{A}_{n-1}^* + \mathbf{M}_{nn}\mathbf{A}_n + \mathbf{M}_{nT}\mathbf{A}_T &= \mathbf{V}_{T0} && \text{sur } T
 \end{aligned}$$

15

(4)

Ces équations peuvent être réarrangées de la façon suivante:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_{00}^* \mathbf{A}_0^* + \mathbf{M}_{0S} \mathbf{A}_S + \mathbf{M}_{01} \mathbf{A}_1 &= \mathbf{M}_{00} \mathbf{A}_0 && \text{sur } I_0 \\
\mathbf{Q}_{00}^* \mathbf{A}_0^* + \mathbf{Q}_{0S} \mathbf{A}_S + \mathbf{Q}_{01} \mathbf{A}_1 &= \mathbf{Q}_{00} \mathbf{A}_0 && \text{sur } I_0 \\
\mathbf{M}_{00}^* \mathbf{A}_0^* + \mathbf{M}_{0S} \mathbf{A}_S + \mathbf{M}_{01} \mathbf{A}_1 &= \mathbf{V}_S 0 && \text{sur } S \\
\mathbf{M}_{10}^* \mathbf{A}_0^* + \mathbf{M}_{1S} \mathbf{A}_S + \mathbf{M}_{11} \mathbf{A}_1 &= \mathbf{M}_{11}^* \mathbf{A}_1^* + \mathbf{M}_{12} \mathbf{A}_2 && \text{sur } I_1 \\
\mathbf{Q}_{10}^* \mathbf{A}_0^* + \mathbf{Q}_{1S} \mathbf{A}_S + \mathbf{Q}_{11} \mathbf{A}_1 &= \mathbf{Q}_{11}^* \mathbf{A}_1^* + \mathbf{Q}_{12} \mathbf{A}_2 && \text{sur } I_1 \\
\mathbf{M}_{21}^* \mathbf{A}_1^* + \mathbf{M}_{22} \mathbf{A}_2 &= \mathbf{M}_{22}^* \mathbf{A}_2^* + \mathbf{M}_{23} \mathbf{A}_3 && \text{sur } I_2 \\
\mathbf{Q}_{21}^* \mathbf{A}_1^* + \mathbf{Q}_{22} \mathbf{A}_2 &= \mathbf{Q}_{22}^* \mathbf{A}_2^* + \mathbf{Q}_{23} \mathbf{A}_3 && \text{sur } I_2 \\
&\dots && \\
&\dots && \\
\mathbf{M}_{(n-1)(n-2)}^* \mathbf{A}_{(n-2)}^* + \mathbf{M}_{(n-1)(n-1)} \mathbf{A}_{(n-1)} &= \mathbf{M}_{(n-1)(n-1)}^* \mathbf{A}_{(n-1)}^* + \mathbf{M}_{(n-1)n} \mathbf{A}_n + \mathbf{M}_{(n-1)T} \mathbf{A}_T && \text{sur } I_{n-1} \\
\mathbf{Q}_{(n-1)(n-2)}^* \mathbf{A}_{(n-2)}^* + \mathbf{Q}_{(n-1)(n-1)} \mathbf{A}_{(n-1)} &= \mathbf{Q}_{(n-1)(n-1)}^* \mathbf{A}_{(n-1)}^* + \mathbf{Q}_{(n-1)n} \mathbf{A}_n + \mathbf{Q}_{(n-1)T} \mathbf{A}_T && \text{sur } I_{n-1} \\
\mathbf{M}_{n(n-1)}^* \mathbf{A}_{n-1}^* + \mathbf{M}_{nn} \mathbf{A}_n + \mathbf{M}_{nT} \mathbf{A}_T &= \mathbf{V}_T 0 && \text{sur } T \\
\mathbf{M}_{n(n-1)}^* \mathbf{A}_{(n-1)}^* + \mathbf{M}_{nn} \mathbf{A}_n + \mathbf{M}_{nT} \mathbf{A}_T &= \mathbf{M}_{nn}^* \mathbf{A}_n^* && \text{sur } I_n \\
\mathbf{Q}_{n(n-1)}^* \mathbf{A}_{(n-1)}^* + \mathbf{Q}_{nn} \mathbf{A}_n + \mathbf{Q}_{nT} \mathbf{A}_T &= \mathbf{Q}_{nn}^* \mathbf{A}_n^* && \text{sur } I_n
\end{aligned} \tag{5}$$

5 En représentation matricielle, ces équations deviennent, en posant $(n-j)$ sous la forme $nj, j = 1, 2, 3 \dots$:

$$\begin{bmatrix}
-\mathbf{M}_{00} & \mathbf{M}_{00}^* & \mathbf{M}_{0S} & \mathbf{M}_{01} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\mathbf{Q}_{00} & \mathbf{Q}_{00}^* & \mathbf{Q}_{0S} & \mathbf{Q}_{01} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \mathbf{M}_{00}^* & \mathbf{M}_{0S} & \mathbf{M}_{01} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \mathbf{M}_{10}^* & \mathbf{M}_{1S} & \mathbf{M}_{11} & -\mathbf{M}_{11}^* & -\mathbf{M}_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \mathbf{Q}_{10}^* & \mathbf{Q}_{1S} & \mathbf{Q}_{11} & -\mathbf{Q}_{11}^* & -\mathbf{Q}_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{M}_{21}^* & \mathbf{M}_{22} & -\mathbf{M}_{22}^* & -\mathbf{M}_{23} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{Q}_{21}^* & \mathbf{Q}_{22} & -\mathbf{Q}_{22}^* & -\mathbf{Q}_{23} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{M}_{n1n2}^* & \mathbf{M}_{nlnl} & -\mathbf{M}_{nlnl}^* & \mathbf{M}_{nT} & -\mathbf{M}_{nln} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{Q}_{n1n2}^* & \mathbf{Q}_{nlnl} & -\mathbf{Q}_{nlnl}^* & \mathbf{Q}_{nT} & -\mathbf{Q}_{nln} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \mathbf{M}_{nnl}^* & \mathbf{M}_{nT} & \mathbf{M}_{nn} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \mathbf{M}_{nnl}^* & \mathbf{M}_{nT} & \mathbf{M}_{nn} & -\mathbf{M}_{nn}^* \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \mathbf{Q}_{nnl}^* & \mathbf{Q}_{nT} & \mathbf{Q}_{nn} & -\mathbf{Q}_{nn}^*
\end{bmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} \mathbf{A}_0 \\ \mathbf{A}_0^* \\ \mathbf{A}_S \\ \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_1^* \\ \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_2^* \\ \mathbf{A}_3 \\ \dots \\ \dots \\ \mathbf{A}_{n1} \\ \mathbf{A}_{n1}^* \\ \mathbf{A}_T \\ \mathbf{A}_n \\ \mathbf{A}_n^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{V}_{S0} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{V}_{T0} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

On compte le nombre d'équations et le nombre d'inconnues de la façon suivante. On suppose que pour chaque interface I_1, I_2, \dots, I_{n-1} il y a N sources au-dessus de l'interface et N sources au-dessous de l'interface, qu'aux interfaces inférieure I_0 et supérieure I_{n+1} il y a respectivement M_1 et M_2 sources sur les deux faces actives des transducteurs S et T et que sur les zones passives de ces deux interfaces il y a respectivement $2(N-M_1)$ et $2(N-M_2)$ sources. Ainsi, le nombre total de sources pour les $n+1$ interfaces (y compris les surfaces actives des transducteurs) est de $2(n+1)N-M_1-M_2$. Le nombre total d'équations est également de $2(n+1)N-M_1-M_2$. Par conséquent, ce système d'équations peut être résolu de façon unique.

L'équation matricielle (6) peut être écrite sous la forme symbolique :

$$\begin{aligned} [\mathbf{M}]\{\mathbf{A}\} &= \{\mathbf{V}_0\} \\ \Rightarrow \{\mathbf{A}\} &= [\mathbf{M}]^{-1}\{\mathbf{V}_0\} \end{aligned} \quad (7)$$

On notera que la dimension de la matrice \mathbf{M} est de :

$$\{2(n+1)N-M_1-M_2 \cdot 2(n+1)N-M_1-M_2\}.$$

Le nombre de vecteurs de source inconnus est également de $2(n+1)N-M_1-M_2$. On peut ainsi calculer le vecteur source global $\{\mathbf{A}\}$.

On va maintenant examiner le cas où les faces actives des transducteurs font partie des interfaces. La modélisation des interactions se fait alors de façon

légèrement différente de ce qui vient d'être exposé. Contrairement au cas précédent, les sources primaires des transducteurs se substituent à certaines des sources secondaires d'interfaces, comme représenté en figure 12. On dispose une couche de sources de chaque côté des $n+1$ interfaces I_0, I_1, \dots, I_n . Les vecteurs sources sur une face d'une interface I_m sont notés A_m au-dessus de l'interface et A_m^* en dessous de l'interface. Sur la figure 12, on a représenté les transducteurs S et T au contact des interfaces I_0 et I_n d'un objet 1 comportant n milieux différents. Ces deux interfaces délimitent des demi - espaces repérés par les milieux 0 et $n+1$. La différence entre les figures 11 et 12 réside dans la répartition des point sources au voisinage des interfaces I_0 et I_n .

Le champ ultrasonore total dans chaque milieu est obtenu par superposition des champs produits par deux ensembles de sources de la façon suivante :

Milieu 1: Sommation des champs générés par A_0^* et A_1 .

Milieu 2: Sommation des champs générés par A_1^* et A_2 .

Milieu 3: Sommation des champs générés par A_2^* et A_3 .

.

Milieu n : Sommation des champs générés par A_{n-1}^* et A_n .

Cependant, dans chaque demi-espace précité, le champ est généré par une seule couche de sources :

Milieu 0: le champ est généré par les sources A_0 .

Milieu $n+1$: le champ est généré par les sources A_n^* .

Pour déterminer les valeurs du vecteur source à partir des conditions aux limites, il faut satisfaire les conditions aux interfaces suivantes. Au passage des $n-1$ interfaces passives (I_1, I_2, \dots, I_{n-1}) la pression \mathbf{P} et la vitesse \mathbf{V} dans la direction localement normale à l'interface considérée ne doivent pas présenter de discontinuité. Les interfaces I_0 et I_n sont adjacentes à la fois à des zones actives et à des zones passives. Les faces actives des transducteurs S et T sont disposées dans les zones actives. Ces zones sont respectivement dénommées I_0^S et I_n^T . Les zones passives ne comportant pas les faces actives des transducteurs sont dénommées I_0 et I_n (sans exposants).

Sur les faces actives I_0^S et I_n^T des transducteurs les vecteurs vitesse sont

respectivement appelés V_{S0} et V_{T0} , et au passage des interfaces passives I_0 et I_n la pression P et la vitesse V dans la direction localement normale à l'interface considérée ne doivent pas présenter de discontinuité, au même titre que les autres $n-1$ interfaces passives.

- 5 Etant donné que $V = M.A$ et $P = Q.A$, les conditions aux limites et aux interfaces entraînent les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 M_{00}^* A_0^* + M_{01} A_1 &= V_{S0} && \text{sur } I_0^S \\
 M_{00}^* A_0^* + M_{01} A_1 &= M_{00} A_0 && \text{sur } I_0 \\
 Q_{00}^* A_0^* + Q_{01} A_1 &= Q_{00} A_0 && \text{sur } I_0 \\
 M_{10}^* A_0^* + M_{11} A_1 &= M_{11}^* A_1^* + M_{12} A_2 && \text{sur } I_1 \\
 Q_{10}^* A_0^* + Q_{11} A_1 &= Q_{11}^* A_1^* + Q_{12} A_2 && \text{sur } I_1 \\
 M_{21}^* A_1^* + M_{22} A_2 &= M_{22}^* A_2^* + M_{23} A_3 && \text{sur } I_2 \\
 Q_{21}^* A_1^* + Q_{22} A_2 &= Q_{22}^* A_2^* + Q_{23} A_3 && \text{sur } I_2 \\
 & \cdot && \\
 & \cdot && \\
 & \cdot && \\
 M_{(n-1)(n-2)}^* A_{(n-2)}^* + M_{(n-1)(n-1)} A_{(n-1)} &= M_{(n-1)(n-1)}^* A_{(n-1)}^* + M_{(n-1)n} A_n && \text{sur } I_{n-1} \\
 Q_{(n-1)(n-2)}^* A_{(n-2)}^* + Q_{(n-1)(n-1)} A_{(n-1)} &= Q_{(n-1)(n-1)}^* A_{(n-1)}^* + Q_{(n-1)n} A_n && \text{sur } I_{n-1} \\
 M_{n(n-1)}^* A_{(n-1)}^* + M_{nn} A_n &= M_{nn}^* A_n^* && \text{sur } I_n \\
 Q_{n(n-1)}^* A_{(n-1)}^* + Q_{nn} A_n &= Q_{nn}^* A_n^* && \text{sur } I_n \\
 M_{n(n-1)}^* A_{n-1}^* + M_{nn} A_n &= V_{T0} && \text{sur } I_n^T \\
 & && \vdots \\
 & && \text{(8)}
 \end{aligned}$$

- 10 Ces équations peuvent être écrites sous forme matricielle, en posant $(n-j)$ sous la forme $n_j, j = 1, 2, 3 \dots$

$$\begin{Bmatrix}
 \{-M_{00}\} & M_{00}^* & M_{01} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \{-Q_{00}\} & \{Q_{00}^*\} & \{Q_{01}\} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & M_{10}^* & M_{11} & -M_{11}^* & -M_{12} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & Q_{10}^* & Q_{11} & -Q_{11}^* & -Q_{12} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & M_{21}^* & M_{22} & -M_{22}^* & -M_{23} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & Q_{21}^* & Q_{22} & -Q_{22}^* & -Q_{23} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & M_{nln2}^* & M_{nlnl} & -M_{nlnl}^* & -M_{nln} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & Q_{nln2}^* & Q_{nlnl} & -Q_{nlnl}^* & -Q_{nln} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & M_{mnl}^* & M_m & \{-M_m^*\} & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \{Q_{mnl}^*\} & \{Q_m\} & \{-Q_m^*\} & \\
 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \times \\ \left\{ \begin{matrix} \mathbf{A}_0 \\ \mathbf{A}_0^* \\ \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_1^* \\ \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_2^* \\ \mathbf{A}_3 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \mathbf{A}_{nl} \\ \mathbf{A}_{nl}^* \\ \mathbf{A}_n \\ \mathbf{A}_n^* \end{matrix} \right\} \end{matrix} = \begin{matrix} \left\{ \begin{matrix} \langle \mathbf{V}_{S0} \rangle \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ \langle \mathbf{V}_{T0} \rangle \\ 0 \end{matrix} \right\} \end{matrix} \quad (9)$$

Les termes figurant entre accolades ($\{ \}$) sont remplacés par des zéros lorsqu'il s'agit des interfaces de rangs 0 et n , tandis que les termes entre crochets pointus ($\langle \rangle$) sont remplacés par des zéros lorsqu'il s'agit des zones actives (I_0^S et I_n^T) et des interfaces de rangs 0 et n.

La matrice (9) ci-dessus peut être écrite sous la forme symbolique :

$$\begin{aligned} [\mathbf{M}]\{\mathbf{A}\} &= \{\mathbf{V}_0\} \\ \Rightarrow \{\mathbf{A}\} &= [\mathbf{M}]^{-1}\{\mathbf{V}_0\} \end{aligned} \quad (10)$$

Ainsi, on peut obtenir le vecteur source global $\{\mathbf{A}\}$.

On va examiner le cas particulier d'une seule interface et d'un seul transducteur, en référence à la figure 13. Ce cas peut être considéré comme un cas particulier du cas illustré en figure 10, si on enlève à ce dernier le transducteur A_T et toutes les interfaces, sauf I_1 . Ce cas permet de calculer le coefficient de réflexion R en termes de valeurs de M et Q , et donc d'avoir une idée de la signification physique des matrices M et Q . Dans ce cas, l'équation (2) se réduit à :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{SS}\mathbf{A}_S + \mathbf{M}_{S1}\mathbf{A}_1 &= \mathbf{V}_{S0} \\ \mathbf{M}_{1S}\mathbf{A}_S + \mathbf{M}_{11}\mathbf{A}_1 &= \mathbf{M}_{11}^*\mathbf{A}_1^* \\ \mathbf{Q}_{1S}\mathbf{A}_S + \mathbf{Q}_{11}\mathbf{A}_1 &= \mathbf{Q}_{11}^*\mathbf{A}_1^* \end{aligned} \quad (11)$$

10 Les deuxième et troisième équations de (11) donnent :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1^* &= [\mathbf{M}_{11}^*]^{-1}\{\mathbf{M}_{1S}\mathbf{A}_S + \mathbf{M}_{11}\mathbf{A}_1\} \\ \mathbf{A}_1^* &= [\mathbf{Q}_{11}^*]^{-1}\{\mathbf{Q}_{1S}\mathbf{A}_S + \mathbf{Q}_{11}\mathbf{A}_1\} \end{aligned} \quad (12)$$

En soustrayant les deux équations de (12), on obtient :

$$\begin{aligned} 0 &= [\mathbf{M}_{11}^*]^{-1}\{\mathbf{M}_{1S}\mathbf{A}_S + \mathbf{M}_{11}\mathbf{A}_1\} - [\mathbf{Q}_{11}^*]^{-1}\{\mathbf{Q}_{1S}\mathbf{A}_S + \mathbf{Q}_{11}\mathbf{A}_1\} \\ \Rightarrow \left\{ [\mathbf{M}_{11}^*]^{-1}\mathbf{M}_{1S} - [\mathbf{Q}_{11}^*]^{-1}\mathbf{Q}_{1S} \right\} \mathbf{A}_S + \left\{ [\mathbf{M}_{11}^*]^{-1}\mathbf{M}_{11} - [\mathbf{Q}_{11}^*]^{-1}\mathbf{Q}_{11} \right\} \mathbf{A}_1 &= 0 \\ \Rightarrow \alpha\mathbf{A}_S + \beta\mathbf{A}_1 &= 0 \\ \Rightarrow \mathbf{A}_1 &= -\beta^{-1}\alpha\mathbf{A}_S \end{aligned} \quad (13)$$

avec :

$$\begin{aligned} \alpha &= \left\{ [\mathbf{M}_{11}^*]^{-1}\mathbf{M}_{1S} - [\mathbf{Q}_{11}^*]^{-1}\mathbf{Q}_{1S} \right\} \\ \beta &= \left\{ [\mathbf{M}_{11}^*]^{-1}\mathbf{M}_{11} - [\mathbf{Q}_{11}^*]^{-1}\mathbf{Q}_{11} \right\} \end{aligned} \quad (14)$$

Etant donné que l'on a d'après (11) :

$$\mathbf{M}_{SS}\mathbf{A}_S + \mathbf{M}_{S1}\mathbf{A}_1 = \mathbf{V}_{S0}$$

on peut écrire :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{SS}\mathbf{A}_S - \mathbf{M}_{S1}\beta^{-1}\alpha\mathbf{A}_S &= \mathbf{V}_{S0} \\ \Rightarrow [\mathbf{M}_{SS} - \mathbf{M}_{S1}\beta^{-1}\alpha]\mathbf{A}_S &= \mathbf{V}_{S0} \end{aligned} \quad (15)$$

20 Le vecteur vitesse au niveau de l'interface dans le milieu 2 peut être exprimé sous forme de matrice de coefficients de transmission T telle que:

$$TM_{1S}A_S$$

et dans le milieu 1 sous forme de matrice de coefficients de réflexion R telle que :

$$M_{1S}A_S + RM_{1S}A_S$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned}
 TM_{1S}A_S &= \mathbf{M}_{11}^* \mathbf{A}_1^* \\
 \text{et} & \\
 \mathbf{M}_{1S}A_S + RM_{1S}A_S &= \mathbf{M}_{1S}A_S + \mathbf{M}_{11}A_1 \\
 \Rightarrow RM_{1S}A_S &= \mathbf{M}_{11}A_1
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_1^* &= \left[\mathbf{M}_{11}^* \right]^{-1} TM_{1S}A_S \\
 \text{et} & \\
 \mathbf{A}_1 &= \left[\mathbf{M}_{11} \right]^{-1} RM_{1S}A_S
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

On notera que la condition de continuité de pression n'est pas nécessairement satisfaite séparément lorsque le problème est formulé en termes de matrices de coefficients de réflexion et de transmission parce que la continuité de la vitesse garantit la continuité de la pression également lorsque l'on considère lesdites matrices.

A partir des équations (13) et (17), on peut écrire :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_1 &= \left[\mathbf{M}_{11} \right]^{-1} RM_{1S}A_S = -\beta^{-1} \alpha A_S \\
 \Rightarrow \left[\mathbf{M}_{11} \right]^{-1} RM_{1S} &= -\beta^{-1} \alpha = -\left\{ \left[\mathbf{M}_{11}^* \right]^{-1} \mathbf{M}_{11} - \left[\mathbf{Q}_{11}^* \right]^{-1} \mathbf{Q}_{11} \right\}^{-1} \left\{ \left[\mathbf{M}_{11}^* \right]^{-1} \mathbf{M}_{1S} - \left[\mathbf{Q}_{11}^* \right]^{-1} \mathbf{Q}_{1S} \right\} \\
 \Rightarrow R = -\beta^{-1} \alpha &= -\mathbf{M}_{11} \left\{ \left[\mathbf{M}_{11}^* \right]^{-1} \mathbf{M}_{11} - \left[\mathbf{Q}_{11}^* \right]^{-1} \mathbf{Q}_{11} \right\}^{-1} \left\{ \left[\mathbf{M}_{11}^* \right]^{-1} \mathbf{M}_{1S} - \left[\mathbf{Q}_{11}^* \right]^{-1} \mathbf{Q}_{1S} \right\} \left[\mathbf{M}_{1S} \right]^{-1}
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

En partant des enseignements de la DPSM, on calcule la valeur des N sources ponctuelles réparties à la surface d'un transducteur par exemple de la façon suivante. On suppose ici que le transducteur est au contact d'un fluide, mais il est bien entendu que l'on peut facilement transposer l'exposé dans le cas où ce transducteur serait au contact d'un corps solide. Soit A_m la valeur de la m-ième source ponctuelle. La pression p_m à une distance rm de cette source ponctuelle est donnée par :

$$p_m(r) = A_m \frac{\exp(ik_j r_m)}{r_m}
 \tag{18-A}$$

expression dans laquelle $i^2 = -1$, $k_f = \omega/c_f$, ω étant la pulsation de l'onde ultrasonore et c_f la vitesse de propagation de cette onde. La pression ultrasonore $p(\mathbf{x})$ en un point \mathbf{x} , situé à une distance r_m de la m -ième source ponctuelle est donnée par :

$$p(\mathbf{x}) = \sum_{m=1}^N p_m(r_m) = \sum_{m=1}^N A_m \frac{\exp(ik_f r_m)}{r_m} \quad (18-B)$$

- 5 Etant donné qu'à partir de la relation existant entre la pression ultrasonore et la vitesse de propagation de l'onde, on peut calculer la vitesse de cette onde au point \mathbf{x} :

$$-\frac{\partial p}{\partial n} = \rho \frac{\partial v_n}{\partial t} = \pm i\omega\rho v_n \quad (18-C)$$

et pour une vitesse exprimée en fonction du temps, de la forme $e^{-i\omega t}$, on obtient sa dérivée simplement en multipliant v_n par un terme positif ou négatif. Dans le cas où

- 10 ce terme est négatif, on a :

$$v_n = \frac{1}{i\omega\rho} \frac{\partial p}{\partial n} \quad (18-D)$$

Ainsi, on obtient la valeur de la vitesse radiale v_n de l'onde ultrasonore à une distance r de la m -ième source ponctuelle :

$$v_m(r) = \frac{A_m}{i\omega\rho} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\exp(ik_f r)}{r} \right) = \frac{A_m}{i\omega\rho} \left(\frac{ik_f \exp(ik_f r)}{r} - \frac{\exp(ik_f r)}{r^2} \right) = \frac{A_m \exp(ik_f r)}{i\omega\rho r} \left(ik_f - \frac{1}{r} \right) \quad (18-E)$$

- 15

La composante dans une direction x_3 de la vitesse est :

$$v_{3m}(r) = \frac{A_m}{i\omega\rho} \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\exp(ik_f r)}{r} \right) = \frac{A_m x_3 \exp(ik_f r)}{i\omega\rho r^2} \left(ik_f - \frac{1}{r} \right) \quad (18-F)$$

Lorsque l'on additionne les contributions des N sources ponctuelles, la valeur totale de la vitesse dans une direction x_3 est :

$$20 \quad v_3(\mathbf{x}) = \sum_{m=1}^N v_{3m}(r_m) = \sum_{m=1}^N \frac{A_m x_{3m} \exp(ik_f r_m)}{i\omega\rho r_m^2} \left(ik_f - \frac{1}{r_m} \right) \quad (18-G)$$

Si on appelle v_0 la vitesse des ondes sur la face active du transducteur dans une direction x_3 , pour toutes les valeurs de \mathbf{x} sur cette face active, la vitesse dans la direction x_3 est égale à v_0 , et on a alors :

$$v_3(\mathbf{x}) = \sum_{m=1}^N \frac{A_m x_{3m} \exp(ik_f r_m)}{i\omega\rho r_m^2} \left(ik_f - \frac{1}{r_m} \right) = v_0 \quad (18-H)$$

- 25 En prenant N points sur la face active du transducteur, on peut obtenir un système de

N équations linéaires à N inconnues ($A_1, A_2, A_3, \dots, A_N$). Cependant, il se pose un problème lorsque la source ponctuelle coïncide avec le point d'intérêt \mathbf{x} , du fait que r_m s'annule et v_{3m} , dans la relation (18-H), est illimitée. Bien entendu, lorsqu'une source ponctuelle et un point d'intérêt \mathbf{x} sont situés sur la face active du transducteur, seuls ces deux points peuvent coïncider et r_m peut être nulle. Pour lever cette difficulté, on place les sources ponctuelles légèrement derrière la face active du transducteur. Dans un tel cas, on appelle r_s la plus petite valeur de r_m .

Lorsque le point \mathbf{x} est situé sur la face active du transducteur, sa composante de vitesse x_3 est corrélée avec la vitesse v_0 des ondes sur cette face active. Si on veut alors annuler les deux autres composantes de vitesse v_1 et v_2 , il faut satisfaire à la fois trois équations, à savoir l'équation (18-H) ci-dessus et les deux équations (18-I) ci-dessous :

$$v_1(\mathbf{x}) = \sum_{m=1}^N \frac{A_m}{i\omega\rho} \frac{x_{1m} \exp(ik_f r_m)}{r_m^2} \left(ik_f - \frac{1}{r_m} \right) = 0$$

$$v_2(\mathbf{x}) = \sum_{m=1}^N \frac{A_m}{i\omega\rho} \frac{x_{2m} \exp(ik_f r_m)}{r_m^2} \left(ik_f - \frac{1}{r_m} \right) = 0$$

(18-I)

Ainsi, on obtient $3.N$ équations pour les N points test des surfaces des sphères telles que celles représentées dans ledit brevet français de DPSM. Cependant, on obtient plus d'équations que d'inconnues. Pour résoudre ce problème, ce brevet français préconise d'augmenter le nombre d'inconnues pour en obtenir $3.N$, en remplaçant chaque source ponctuelle par un triplet de sources ponctuelles. Ces trois sources ont des valeurs différentes et sont disposées sur un même plan parallèle à la face active du transducteur, à une distance $x_3 = -r_s$ de cette face. Les trois sources ponctuelles sont disposées aux sommets d'un triangle équilatéral orienté aléatoirement afin de préserver les propriétés isotropes du matériau traversé par les ondes et éviter toute orientation préférentielle de l'émission. Ainsi, en résolvant un système de $3N$ équations linéaires (dans le cas de triplets) ou de N équations linéaires (pour une source ponctuelle unique), on obtient les valeurs de A_m associées à toutes les sources ponctuelles. Une fois obtenues les valeurs de A_m , on calcule la pression $p(\mathbf{x})$ en tout point à partir de la relation (18-B), que ce soit sur la face active du transducteur ou au-delà. On remarquera que dans le cas d'un fluide parfait non visqueux, seule la

composante de vitesse normale (v_3) à l'interface fluide-solide (sur la face active du transducteur) doit être continue. Les composantes de vitesse parallèles à cette face active ne sont pas nécessairement continues parce que des glissements peuvent se produire entre la face active et le fluide. Cependant, de tels glissements ne peuvent pas se produire dans le cas de fluides visqueux, et les trois composantes de la vitesse doivent être continues à ladite interface.

On va exposer ci-dessous le calcul des paramètres des sources à l'aide du calcul matriciel, en référence à la propagation d'ondes ultrasonores dans un fluide, mais il est bien entendu que ce calcul peut être aisément transposé dans d'autres domaines d'application, tels que ceux cités ci-dessus. Ce calcul est présenté pour des sources en triplets, lorsque les trois composantes cartésiennes de vitesse sur la face active du transducteur correspondent à celles dans le fluide, à l'interface avec le transducteur, comme c'est le cas avec des fluides visqueux. Dans le cas contraire, on utilisera des sources ponctuelles uniques à la place des triplets, en éliminant les composantes de vitesse v_1 et v_2 dans les calculs. La dimension des matrices et les dimensions des vecteurs passeront alors de $3N$ à N .

En combinant les relations (18-H) et (18-I), on obtient :

$$\mathbf{V}_s = \mathbf{M}_{ss} \mathbf{A}_s \quad (18-J)$$

dans cette relation, \mathbf{V}_s est le vecteur de dimension ($3N \times 1$) des composantes de vitesse en N points \mathbf{x} et \mathbf{A}_s est le vecteur de dimension ($3N \times 1$) comportant les grandeurs physiques relatives $3N$ sources ponctuelles. \mathbf{M}_{ss} est la matrice de dimensions ($3N \times 3N$) liant les deux vecteurs \mathbf{V}_s et \mathbf{A}_s . A partir des équations (18-H) et (18-I), on obtient aussi :

$$\{\mathbf{V}_s\}^T = [v_1^1 \quad v_2^1 \quad v_3^1 \quad v_1^2 \quad v_2^2 \quad v_3^2 \quad \dots \quad v_1^N \quad v_2^N \quad v_3^N] \quad (18-K)$$

On notera que la transposée du vecteur colonne \mathbf{V}_s est un vecteur rangée de dimension ($1 \times 3N$). Les éléments de ce vecteur sont notés v_j^n , l'indice j pouvant prendre les valeurs 1, 2 ou 3 et indiquant la direction de la composante cartésienne de la vitesse de propagation des ondes. L'exposant n peut prendre toute valeur entre 1 et N et il correspond au point de la face active du transducteur pour lequel la composante de vitesse est définie.

Pour la plupart des transducteurs ultrasonores, v_j^n est nul pour $j=1$ ou 2 (c'est-à-dire pour des composantes de vitesse parallèles à l'interface) et $v_j^n = v_0$ pour $j = 3$ (composante normale de la vitesse). Dans ce cas, la relation (18-K) devient :

$$\{\mathbf{V}_S\}^T = [0 \quad 0 \quad v_0 \quad 0 \quad 0 \quad v_0 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \quad v_0] \quad (18-L)$$

5 et le vecteur \mathbf{A}_S est donné par :

$$\{\mathbf{A}_S\}^T = [A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad A_4 \quad A_5 \quad A_6 \quad \dots \quad A_{3N-2} \quad A_{3N-1} \quad A_{3N}] \quad (18-M)$$

La matrice carrée \mathbf{M}_{SS} est obtenue à partir des équations (18-H) et (18-I) :

$$\mathbf{M}_{SS} = \begin{bmatrix} f(x_{11}^1, r_1^1) & f(x_{12}^1, r_2^1) & f(x_{13}^1, r_3^1) & f(x_{14}^1, r_4^1) & \dots & \dots & f(x_{1(3N-1)}^1, r_{3N-1}^1) & f(x_{1(3N)}^1, r_{3N}^1) \\ f(x_{21}^1, r_1^1) & f(x_{22}^1, r_2^1) & f(x_{23}^1, r_3^1) & f(x_{24}^1, r_4^1) & \dots & \dots & f(x_{2(3N-1)}^1, r_{3N-1}^1) & f(x_{2(3N)}^1, r_{3N}^1) \\ f(x_{31}^1, r_1^1) & f(x_{32}^1, r_2^1) & f(x_{33}^1, r_3^1) & f(x_{34}^1, r_4^1) & \dots & \dots & f(x_{3(3N-1)}^1, r_{3N-1}^1) & f(x_{3(3N)}^1, r_{3N}^1) \\ f(x_{11}^2, r_1^2) & f(x_{12}^2, r_2^2) & f(x_{13}^2, r_3^2) & f(x_{14}^2, r_4^2) & \dots & \dots & f(x_{1(3N-1)}^2, r_{3N-1}^2) & f(x_{1(3N)}^2, r_{3N}^2) \\ f(x_{21}^2, r_1^2) & f(x_{22}^2, r_2^2) & f(x_{23}^2, r_3^2) & f(x_{24}^2, r_4^2) & \dots & \dots & f(x_{2(3N-1)}^2, r_{3N-1}^2) & f(x_{2(3N)}^2, r_{3N}^2) \\ f(x_{31}^2, r_1^2) & f(x_{32}^2, r_2^2) & f(x_{33}^2, r_3^2) & f(x_{34}^2, r_4^2) & \dots & \dots & f(x_{3(3N-1)}^2, r_{3N-1}^2) & f(x_{3(3N)}^2, r_{3N}^2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f(x_{31}^N, r_1^N) & f(x_{32}^N, r_2^N) & f(x_{33}^N, r_3^N) & f(x_{34}^N, r_4^N) & \dots & \dots & f(x_{3(3N-1)}^N, r_{3N-1}^N) & f(x_{3(3N)}^N, r_{3N}^N) \end{bmatrix}_{3N \times 3N} \quad (18-N)$$

10 avec :

$$f(x_{jm}^n, r_m^n) = \frac{x_{jm}^n \exp(ik_f r_m^n)}{i\omega\rho(r_m^n)^2} \left(ik_f - \frac{1}{r_m^n} \right) \quad (18-O)$$

Dans la relation (18-O), le premier indice j de x peut prendre les valeurs 1, 2 ou 3 et indique à quelle direction x_1 , x_2 ou x_3 se rapporte x . L'indice m de x et de r peut prendre les valeurs de 1 à $3N$, en fonction de la source ponctuelle considérée, tandis que l'indice n peut prendre toute valeur entre 1 et N en fonction du point considéré

15 de la face active du transducteur pour lequel on calcule la composante de vitesse.

Soit \mathbf{x}_n un des points \mathbf{x} (situé à l'arrière de la face active du transducteur). Le vecteur reliant la m -ième source ponctuelle à ce point est noté r_m^n et ses trois composantes selon les directions x_1 , x_2 , et x_3 ont pour valeurs x_{jm}^n , $j = 1, 2, 3$ dans les

20 équations (18-N) et (18-O).

A partir de l'équation (18-J), on obtient les grandeurs relatives aux sources ponctuelles en inversant la matrice \mathbf{M}_{SS} :

$$\mathbf{A}_S = [\mathbf{M}_{SS}]^{-1} \mathbf{V}_S = \mathbf{N}_{SS} \mathbf{V}_S \quad (18-P)$$

Une fois que l'on a ainsi calculé le vecteur source \mathbf{A}_S , on obtient la pression $p(\mathbf{x})$ à partir de l'équation (18-B) ou encore le vecteur vitesse $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ en tout point (sur la face active du transducteur ou au-delà) à partir des équations (18-H) et (18-I). Par la suite, on appelle "point d'observation" tout point du fluide (ou, de façon plus générale, tout point d'un milieu dans lequel se produit une interaction entre une onde et le matériau de ce milieu) pour lequel on calcule les vecteurs de vitesse et de pression. On obtient les composantes de pression et de vitesse à partir des relations suivantes:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_T &= \mathbf{Q}_{TS} \mathbf{A}_S \\ \mathbf{V}_T &= \mathbf{M}_{TS} \mathbf{A}_S \end{aligned} \quad (18Q)$$

Dans cette expression, \mathbf{P}_T est un vecteur de dimension $(M \times 1)$ et comporte les valeurs de pression en M points d'observation, et \mathbf{V}_T est un vecteur de dimension $(3M \times 1)$ comportant les trois composantes en tout point d'observation. L'expression de \mathbf{V}_T est similaire à celle de \mathbf{V}_S tirée de l'expression (18-K). La seule différence réside dans le fait que sa dimension est de $(3M \times 1)$ et non pas de $(3N \times 1)$. La matrice \mathbf{M}_{TS} est la même que celle de \mathbf{M}_{SS} dans l'équation (18-N) si les points d'observation sont identiques aux points de la face active du transducteur pour lesquels les composantes de vitesse sont choisies de façon à obtenir le vecteur source \mathbf{A}_S dans l'équation (18-P). Cependant, pour calculer le vecteur vitesse en différents points, l'expression donnant \mathbf{M}_{TS} est légèrement différente de celle de \mathbf{M}_{SS} tirée de l'équation (18-N). Par conséquent, sa dimension est de $(3M \times 3N)$ comme marqué dans l'équation (18-R) ci-dessous:

$$\mathbf{M}_{TS} = \begin{bmatrix} f(x_{11}^1, r_1^1) & f(x_{12}^1, r_2^1) & f(x_{13}^1, r_3^1) & f(x_{14}^1, r_4^1) & \dots & \dots & f(x_{1(3N-1)}^1, r_{3N-1}^1) & f(x_{1(3N)}^1, r_{3N}^1) \\ f(x_{21}^1, r_1^1) & f(x_{22}^1, r_2^1) & f(x_{23}^1, r_3^1) & f(x_{24}^1, r_4^1) & \dots & \dots & f(x_{2(3N-1)}^1, r_{3N-1}^1) & f(x_{2(3N)}^1, r_{3N}^1) \\ f(x_{31}^1, r_1^1) & f(x_{32}^1, r_2^1) & f(x_{33}^1, r_3^1) & f(x_{34}^1, r_4^1) & \dots & \dots & f(x_{3(3N-1)}^1, r_{3N-1}^1) & f(x_{3(3N)}^1, r_{3N}^1) \\ f(x_{11}^2, r_1^2) & f(x_{12}^2, r_2^2) & f(x_{13}^2, r_3^2) & f(x_{14}^2, r_4^2) & \dots & \dots & f(x_{1(3N-1)}^2, r_{3N-1}^2) & f(x_{1(3N)}^2, r_{3N}^2) \\ f(x_{21}^2, r_1^2) & f(x_{22}^2, r_2^2) & f(x_{23}^2, r_3^2) & f(x_{24}^2, r_4^2) & \dots & \dots & f(x_{2(3N-1)}^2, r_{3N-1}^2) & f(x_{2(3N)}^2, r_{3N}^2) \\ f(x_{31}^2, r_1^2) & f(x_{32}^2, r_2^2) & f(x_{33}^2, r_3^2) & f(x_{34}^2, r_4^2) & \dots & \dots & f(x_{3(3N-1)}^2, r_{3N-1}^2) & f(x_{3(3N)}^2, r_{3N}^2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f(x_{31}^M, r_1^M) & f(x_{32}^M, r_2^M) & f(x_{33}^M, r_3^M) & f(x_{34}^M, r_4^M) & \dots & \dots & f(x_{3(3N-1)}^M, r_{3N-1}^M) & f(x_{3(3N)}^M, r_{3N}^M) \end{bmatrix}_{3M \times 3N} \quad (18-R)$$

Dans cette expression, le terme $f(x_{jm}^n, r_m^n)$ est identique à celui figurant dans l'équation (18-O). Les définitions des indices j et m sont les mêmes que celles dans l'équation (18-O). Les exposants n des variables x et r peuvent prendre toute valeur entre 1 et M , en fonction du point considéré. Il est à remarquer que \mathbf{M}_{TS} n'est pas une

5 matrice carrée lorsque M est différent de N .

On obtient la matrice \mathbf{Q}_{TS} à partir de l'équation (18-B) lorsqu'il y a $3N$ sources ponctuelles et M points considérés:

$$\mathbf{Q}_{TS} = \begin{bmatrix} \frac{\exp(ik_f r_1^1)}{r_1^1} & \frac{\exp(ik_f r_2^1)}{r_2^1} & \frac{\exp(ik_f r_3^1)}{r_3^1} & \dots & \dots & \frac{\exp(ik_f r_{3N}^1)}{r_{3N}^1} \\ \frac{\exp(ik_f r_1^2)}{r_1^2} & \frac{\exp(ik_f r_2^2)}{r_2^2} & \frac{\exp(ik_f r_3^2)}{r_3^2} & \dots & \dots & \frac{\exp(ik_f r_{3N}^2)}{r_{3N}^2} \\ \frac{\exp(ik_f r_1^3)}{r_1^3} & \frac{\exp(ik_f r_2^3)}{r_2^3} & \frac{\exp(ik_f r_3^3)}{r_3^3} & \dots & \dots & \frac{\exp(ik_f r_{3N}^3)}{r_{3N}^3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\exp(ik_f r_1^M)}{r_1^M} & \frac{\exp(ik_f r_2^M)}{r_2^M} & \frac{\exp(ik_f r_3^M)}{r_3^M} & \dots & \dots & \frac{\exp(ik_f r_{3N}^M)}{r_{3N}^M} \end{bmatrix}_{M \times 3N} \quad (18-S)$$

10 Dans cette équation, la définition de r_m^n est la même que dans les équations (18-R) et (18-Q), et c'est la distance entre la m -ième source ponctuelle et le n -ième point considéré.

En revenant à l'équation (18), on obtient, à partir des équations (18-O) et (18-S), les éléments de la matrice \mathbf{Q} de cette équation (matrice établissant la relation

15 entre la pression acoustique et le vecteur source) ainsi que les éléments de sa matrice \mathbf{M} (qui établit la relation entre la composante normale de vitesse et le vecteur source), ce qui donne:

$$\mathbf{Q} = \frac{e^{ikr}}{r} \quad (19)$$

$$\mathbf{M} = \frac{1}{i\omega\rho} \frac{x_3}{r^3} (ikr - 1) e^{ikr}$$

$$\text{avec: } k = \frac{\omega}{c}, \quad \lambda = \frac{c}{f} = \frac{2\pi c}{\omega}$$

On définit maintenant deux matrices $\tilde{\mathbf{Q}}$ et $\tilde{\mathbf{M}}$ similaires aux matrices \mathbf{Q}^* et \mathbf{M}^* de l'équation (18), la seule différence étant que les matrices \mathbf{Q}^* et \mathbf{M}^* sont relatives aux propriétés du milieu 2 (parce qu'elles donnent la pression et la vitesse dans le milieu 2 en valeurs de répartition de sources \mathbf{A}_1^* , alors que les matrices $\tilde{\mathbf{Q}}$ et $\tilde{\mathbf{M}}$ utilisent les propriétés du milieu 1. Par conséquent, les matrices $\tilde{\mathbf{Q}}$ et $\tilde{\mathbf{M}}$ donnent les valeurs de pression et de vitesse pour des sources équivalentes réparties selon une position \mathbf{A}_1^* lorsque le milieu 2 est remplacé par le milieu 1. On peut alors écrire l'équation 19 ainsi:

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\mathbf{Q}}}{e^{ik_1 r}} &= \frac{\mathbf{Q}^*}{e^{ik_2 r}} \\ \Rightarrow \mathbf{Q}^* &= \tilde{\mathbf{Q}} \frac{e^{ik_2 r}}{e^{ik_1 r}} = \tilde{\mathbf{Q}} \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \end{aligned} \quad (20)$$

De la même façon, on obtient:

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\mathbf{M}}\rho_1}{(ik_1 r - 1)e^{ik_1 r}} &= \frac{\mathbf{M}^*\rho_2}{(ik_2 r - 1)e^{ik_2 r}} \\ \Rightarrow \mathbf{M}^* &= \tilde{\mathbf{M}} \frac{\rho_1 (ik_2 r - 1)e^{ik_2 r}}{\rho_2 (ik_1 r - 1)e^{ik_1 r}} = \tilde{\mathbf{M}} \frac{\beta_2}{\beta_1} \end{aligned} \quad (21)$$

On notera ici que les matrices $\tilde{\mathbf{Q}}_{11}$ et $\tilde{\mathbf{M}}_{11}$ sont similaires aux matrices \mathbf{Q}_{11} et \mathbf{M}_{11} de l'équation (18), la seule différence étant que les matrices $\tilde{\mathbf{Q}}_{11}$ et $\tilde{\mathbf{M}}_{11}$ donnent les valeurs de pression et de vitesse pour les points aux interfaces dans la configuration de répartition de sources \mathbf{A}_1^* , tandis que les matrices \mathbf{Q}_{11} et \mathbf{M}_{11} donnent les valeurs de pression et de vitesse pour les points aux interfaces dans la configuration de répartition de sources \mathbf{A}_1 . Il faut noter que ces deux matrices utilisent les propriétés de matériau du milieu 1. Etant donné que la configuration de répartition \mathbf{A}_1 est située juste au-dessus de l'interface, alors que la configuration de répartition \mathbf{A}_1^* est située juste au-dessous de l'interface, les vecteurs normaux de vitesse relatifs aux points situés de part et d'autre de l'interface sont de même amplitude et sens opposés. Les pressions générées par ces deux couches de sources ponctuelles sont de même amplitude. On a alors:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{Q}}_{11} &= \mathbf{Q}_{11} = \mathbf{Q}_{11}^* \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \\ \tilde{\mathbf{M}}_{11} &= -\mathbf{M}_{11} = \mathbf{M}_{11}^* \frac{\beta_1}{\beta_2}\end{aligned}\quad (22)$$

En reportant l'équation (22) dans l'équation (18), on obtient:

$$\begin{aligned}R &= -\mathbf{M}_{11} \left\{ [-\mathbf{M}_{11}^*]^{-1} \mathbf{M}_{11} - [\mathbf{Q}_{11}^*]^{-1} \mathbf{Q}_{11} \right\}^{-1} \left\{ [\mathbf{M}_{11}^*]^{-1} \mathbf{M}_{1S} - [\mathbf{Q}_{11}^*]^{-1} \mathbf{Q}_{1S} \right\} [\mathbf{M}_{1S}]^{-1} \\ &= -\mathbf{M}_{11} \left\{ \left[-\mathbf{M}_{11} \frac{\beta_2}{\beta_1} \right]^{-1} \mathbf{M}_{11} - \left[\mathbf{Q}_{11} \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right]^{-1} \mathbf{Q}_{11} \right\}^{-1} \left\{ \left[\tilde{\mathbf{M}}_{11} \frac{\beta_2}{\beta_1} \right]^{-1} \mathbf{M}_{1S} - \left[\tilde{\mathbf{Q}}_{11} \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right]^{-1} \mathbf{Q}_{1S} \right\} [\mathbf{M}_{1S}]^{-1} \\ &= \mathbf{M}_{11} \left\{ \frac{\beta_1}{\beta_2} [\mathbf{M}_{11}]^{-1} \mathbf{M}_{11} + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} [\mathbf{Q}_{11}]^{-1} \mathbf{Q}_{11} \right\}^{-1} \left\{ \frac{\beta_1}{\beta_2} [\tilde{\mathbf{M}}_{11}]^{-1} \mathbf{M}_{1S} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} [\tilde{\mathbf{Q}}_{11}]^{-1} \mathbf{Q}_{1S} \right\} [\mathbf{M}_{1S}]^{-1} \\ &= -\tilde{\mathbf{M}}_{11} \left\{ \frac{\beta_1}{\beta_2} + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right\}^{-1} \left\{ \frac{\beta_1}{\beta_2} [\tilde{\mathbf{M}}_{11}]^{-1} \mathbf{M}_{1S} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} [\tilde{\mathbf{Q}}_{11}]^{-1} \mathbf{Q}_{1S} \right\} [\mathbf{M}_{1S}]^{-1}\end{aligned}\quad (23)$$

- 5 Si la configuration de répartition de sources $\tilde{\mathbf{A}}$ à l'emplacement \mathbf{A}_1^* de l'interface est équivalente à celle des sources \mathbf{A}_S à l'emplacement considéré, on obtient, en rendant égales les expressions de vitesse des deux ensembles de sources:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{M}}_{11} \tilde{\mathbf{A}} &= \mathbf{M}_{1S} \mathbf{A}_S \\ \Rightarrow \tilde{\mathbf{A}} &= [\tilde{\mathbf{M}}_{11}]^{-1} \mathbf{M}_{1S} \mathbf{A}_S\end{aligned}\quad (24)$$

de la même façon, on obtient pour les pressions:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{Q}}_{11} \tilde{\mathbf{A}} &= \mathbf{Q}_{1S} \mathbf{A}_S \\ \Rightarrow \tilde{\mathbf{A}} &= [\tilde{\mathbf{Q}}_{11}]^{-1} \mathbf{Q}_{1S} \mathbf{A}_S\end{aligned}\quad (25)$$

- On remarquera que $\tilde{\mathbf{A}}$ et \mathbf{A}_1^* sont différentes bien qu'elles soient situées au même emplacement. $\tilde{\mathbf{A}}$ représente la répartition de sources ponctuelles équivalente lorsque les deux milieux 1 et 2 sont identiques. En d'autres termes, si on remplace le milieu 2 par le milieu 1, il n'y a pas d'interface réelle pour $\tilde{\mathbf{A}}$. Cependant, pour \mathbf{A}_1^* il y a une interface réelle entre les milieux 1 et 2.

En comparant les équations (24) et (25), on obtient:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{A}} &= [\tilde{\mathbf{M}}_{11}]^{-1} \mathbf{M}_{1S} \mathbf{A}_S = [\tilde{\mathbf{Q}}_{11}]^{-1} \mathbf{Q}_{1S} \mathbf{A}_S \\ \Rightarrow [\tilde{\mathbf{M}}_{11}]^{-1} \mathbf{M}_{1S} \mathbf{A}_S [\mathbf{A}_S]^{-1} &= [\tilde{\mathbf{Q}}_{11}]^{-1} \mathbf{Q}_{1S} \mathbf{A}_S [\mathbf{A}_S]^{-1} \\ \Rightarrow [\tilde{\mathbf{M}}_{11}]^{-1} \mathbf{M}_{1S} &= [\tilde{\mathbf{Q}}_{11}]^{-1} \mathbf{Q}_{1S}\end{aligned}\quad (26)$$

En substituant l'équation (26) dans l'équation (23), on obtient:

$$\begin{aligned}
R &= -\tilde{\mathbf{M}}_{11} \left\{ \frac{\beta_1}{\beta_2} + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right\}^{-1} \left\{ \frac{\beta_1}{\beta_2} [\tilde{\mathbf{M}}_{11}]^{-1} \mathbf{M}_{1S} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} [\tilde{\mathbf{Q}}_{11}]^{-1} \mathbf{Q}_{1S} \right\} [\mathbf{M}_{1S}]^{-1} \\
&= -\tilde{\mathbf{M}}_{11} \left\{ \frac{\beta_1}{\beta_2} + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right\}^{-1} \left\{ \frac{\beta_1}{\beta_2} [\tilde{\mathbf{M}}_{11}]^{-1} \mathbf{M}_{1S} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} [\tilde{\mathbf{M}}_{11}]^{-1} \mathbf{M}_{1S} \right\} [\mathbf{M}_{1S}]^{-1} \\
&= -\tilde{\mathbf{M}}_{11} \left\{ \frac{\beta_1}{\beta_2} + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right\}^{-1} \left\{ \frac{\beta_1}{\beta_2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right\} [\tilde{\mathbf{M}}_{11}]^{-1} \mathbf{M}_{1S} [\mathbf{M}_{1S}]^{-1} \\
&= -\left\{ \frac{\beta_1}{\beta_2} + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right\}^{-1} \left\{ \frac{\beta_1}{\beta_2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right\} \tilde{\mathbf{M}}_{11} [\tilde{\mathbf{M}}_{11}]^{-1} \mathbf{M}_{1S} [\mathbf{M}_{1S}]^{-1} \\
&= -\left\{ \frac{\beta_1}{\beta_2} + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right\}^{-1} \left\{ \frac{\beta_1}{\beta_2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right\} \\
&= \frac{\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1}{\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1}
\end{aligned} \tag{27}$$

En substituant dans l'équation (27) les valeurs de α_1 , α_2 , β_1 et β_2 par celles données dans les équations (20) et (21), on obtient:

$$5 \quad R = \frac{\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1}{\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1} = \frac{e^{ik_1 r} \rho_1 (ik_2 r - 1) e^{ik_2 r} - e^{ik_2 r} \rho_2 (ik_1 r - 1) e^{ik_1 r}}{e^{ik_1 r} \rho_1 (ik_2 r - 1) e^{ik_2 r} + e^{ik_2 r} \rho_2 (ik_1 r - 1) e^{ik_1 r}} = \frac{\rho_1 (ik_2 r - 1) - \rho_2 (ik_1 r - 1)}{\rho_1 (ik_2 r - 1) + \rho_2 (ik_1 r - 1)} \tag{28}$$

Si l'on a affaire à des ondes à haute fréquence ($k_m r \gg 1$),

$$R = \frac{\rho_1 (ik_2 r - 1) - \rho_2 (ik_1 r - 1)}{\rho_1 (ik_2 r - 1) + \rho_2 (ik_1 r - 1)} \approx \frac{\rho_1 (ik_2 r) - \rho_2 (ik_1 r)}{\rho_1 (ik_2 r) + \rho_2 (ik_1 r)} = \frac{\rho_1 k_2 - \rho_2 k_1}{\rho_1 k_2 + \rho_2 k_1} = \frac{\rho_1 \frac{\omega}{c_2} - \rho_2 \frac{\omega}{c_1}}{\rho_1 \frac{\omega}{c_2} + \rho_2 \frac{\omega}{c_1}} = \frac{\rho_1 c_1 - \rho_2 c_2}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2} \tag{29}$$

10 par contre, pour des fréquences basses ($k_m r \ll 1$), on a:

$$R = \frac{\rho_1 (ik_2 r - 1) - \rho_2 (ik_1 r - 1)}{\rho_1 (ik_2 r - 1) + \rho_2 (ik_1 r - 1)} \approx \frac{\rho_1 (-1) - \rho_2 (-1)}{\rho_1 (-1) + \rho_2 (-1)} = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \tag{30}$$

On remarquera que le coefficient de réflexion en hautes fréquences est similaire au coefficient de réflexion en ondes planes en incidence normale. Par contre, il est légèrement différent en basses fréquences. La raison en est que l'exemple exposé ici se rapporte aux ondes sphériques avec une source ponctuelle. On modélise les ondes planes en superposant un grand nombre de sources

ponctuelles.

On va maintenant exposer des caractéristiques du procédé de l'invention en référence à un système multicouches et aux interactions sur la face active du transducteur. Le problème géométrique considéré ici est identique à celui relatif à
 5 celui de la figure 10. La différence dans les conditions aux limites entre le cas présent et celui exposé en début de description, pour lequel la vitesse des ondes aux frontières S et T est spécifiée et dénommée respectivement V_{S0} et V_{T0} , alors que dans le cas exposé ici, elle n'est pas spécifiée. En l'absence de toutes les autres interfaces et des transducteurs, cette vitesse sur les faces S et T serait respectivement
 10 V_{S0} et V_{T0} . Dès que l'on introduit d'autres interfaces et un second transducteur, la vitesse des ondes sur la face S n'est plus V_{S0} et celle sur la face T n'est plus V_{T0} . On va donc maintenant considérer le changement de vitesse sur la face du transducteur dû à l'interaction transducteur-interface.

On résout ce problème en deux étapes. D'abord, on obtient les valeurs des
 15 vecteurs sources A_S et A_T de transducteurs actifs à partir des conditions de vitesse de surface:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{SS} \mathbf{A}_S &= \mathbf{V}_{S0} \\ \Rightarrow \mathbf{A}_S &= [\mathbf{M}_{SS}]^{-1} \mathbf{V}_{S0} \\ &\text{et similairement,} \\ \mathbf{A}_T &= [\mathbf{M}_{TT}]^{-1} \mathbf{V}_{T0} \end{aligned} \quad (31)$$

Dans une seconde étape, on introduit deux couches de sources ponctuelles à chaque interface, y compris S et T, comme représenté en figure 14. Avec l'introduction de
 20 ces nouvelles sources, la valeur totale des sources au-dessous de l'interface S est égale à $\mathbf{A}_S + \mathbf{A}_0^*$ et à $\mathbf{A}_T + \mathbf{A}_n$ au-dessus de l'interface T. Sur la figure 14, l'interface T est référencée I_0 et l'interface T est référencée I_n . Les autres interfaces sont respectivement référencées I_1 à I_{n-1} .

Les champs ultrasonores dans la plupart des couches sont obtenus par
 25 superposition des champs générés par deux couches de sources ponctuelles comme noté ci-dessous:

Milieu 2: Sommation des champs générés par \mathbf{A}_1^* et \mathbf{A}_2 .

Milieu 3: Sommation des champs générés par \mathbf{A}_2^* et \mathbf{A}_3 .

.....

.....

Milieu n-1: Sommation des champs générés par \mathbf{A}_{n-2}^* et \mathbf{A}_{n-1} .

Par contre, dans les demi-espaces inférieur (milieu 1, au-dessus de la face S) et
 5 supérieur (milieu n, au-dessous de la face T), le champ total est généré par trois
 sources ponctuelles :

Milieu 1: Sommation des champs générés par \mathbf{A}_0^* , \mathbf{A}_1 et \mathbf{A}_S .

Milieu n: Sommation des champs générés par \mathbf{A}_{n-1}^* , \mathbf{A}_n et \mathbf{A}_T .

A l'intérieur du milieu que constitue un transducteur (sous la face S et sur la face T),
 10 le champ est produit par une seule couche de sources ponctuelles:

A l'intérieur du transducteur S: Le champ est généré par \mathbf{A}_0 sources
 seulement.

A l'intérieur du transducteur T: Le champ est généré par \mathbf{A}_n^* sources
 seulement.

15 On détermine la valeur des sources à partir des conditions aux interfaces de
 la façon suivante.

Les conditions aux interfaces (CLI) suivantes doivent être satisfaites. Au
 passage des n-1 interfaces passives centrales (I_1, I_2, \dots, I_{n-1}), la pression (\mathbf{P}) et la
 vitesse normale (\mathbf{V}), c'est-à-dire la composante de vitesse selon la direction
 20 localement normale à l'interface considérée, doivent être continues. De même, au
 passage des interfaces S(I_0) et T(I_n) la pression (\mathbf{P}) et la composante de vitesse selon
 la direction localement normale à l'interface considérée (\mathbf{V}), doivent être continues,
 comme c'est le cas pour toutes les autres n-1 interfaces.

La vitesse étant notée $\mathbf{V} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{A}$, et la pression $\mathbf{P} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{A}$, les conditions de
 25 continuité entraînent les équations suivantes:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_{00}^* \mathbf{A}_0^* + \mathbf{M}_{0S} \mathbf{A}_S + \mathbf{M}_{01} \mathbf{A}_1 &= \mathbf{M}_{00} \mathbf{A}_0 && \text{sur } I_0 \\
 \mathbf{Q}_{00}^* \mathbf{A}_0^* + \mathbf{Q}_{0S} \mathbf{A}_S + \mathbf{Q}_{01} \mathbf{A}_1 &= \mathbf{Q}_{00} \mathbf{A}_0 && \text{sur } I_0 \\
 \mathbf{M}_{10}^* \mathbf{A}_0^* + \mathbf{M}_{1S} \mathbf{A}_S + \mathbf{M}_{11} \mathbf{A}_1 &= \mathbf{M}_{11}^* \mathbf{A}_1^* + \mathbf{M}_{12} \mathbf{A}_2 && \text{sur } I_1 \\
 \mathbf{Q}_{10}^* \mathbf{A}_0^* + \mathbf{Q}_{1S} \mathbf{A}_S + \mathbf{Q}_{11} \mathbf{A}_1 &= \mathbf{Q}_{11}^* \mathbf{A}_1^* + \mathbf{Q}_{12} \mathbf{A}_2 && \text{sur } I_1 \\
 \mathbf{M}_{21}^* \mathbf{A}_1^* + \mathbf{M}_{22} \mathbf{A}_2 &= \mathbf{M}_{22}^* \mathbf{A}_2^* + \mathbf{M}_{23} \mathbf{A}_3 && \text{sur } I_2 \\
 \mathbf{Q}_{21}^* \mathbf{A}_1^* + \mathbf{Q}_{22} \mathbf{A}_2 &= \mathbf{Q}_{22}^* \mathbf{A}_2^* + \mathbf{Q}_{23} \mathbf{A}_3 && \text{sur } I_2 \\
 & \dots && \\
 & \dots && \\
 \mathbf{M}_{(n-1)(n-2)}^* \mathbf{A}_{(n-2)}^* + \mathbf{M}_{(n-1)(n-1)} \mathbf{A}_{(n-1)} &= \mathbf{M}_{(n-1)(n-1)}^* \mathbf{A}_{(n-1)}^* + \mathbf{M}_{(n-1)n} \mathbf{A}_n + \mathbf{M}_{(n-1)T} \mathbf{A}_T && \text{sur } I_{n-1} \\
 \mathbf{Q}_{(n-1)(n-2)}^* \mathbf{A}_{(n-2)}^* + \mathbf{Q}_{(n-1)(n-1)} \mathbf{A}_{(n-1)} &= \mathbf{Q}_{(n-1)(n-1)}^* \mathbf{A}_{(n-1)}^* + \mathbf{Q}_{(n-1)n} \mathbf{A}_n + \mathbf{Q}_{(n-1)T} \mathbf{A}_T && \text{sur } I_{n-1} \\
 \mathbf{M}_{n(n-1)}^* \mathbf{A}_{(n-1)}^* + \mathbf{M}_{nn} \mathbf{A}_n + \mathbf{M}_{nT} \mathbf{A}_T &= \mathbf{M}_{nn}^* \mathbf{A}_n^* && \text{sur } I_n \\
 \mathbf{Q}_{n(n-1)}^* \mathbf{A}_{(n-1)}^* + \mathbf{Q}_{nn} \mathbf{A}_n + \mathbf{Q}_{nT} \mathbf{A}_T &= \mathbf{Q}_{nn}^* \mathbf{A}_n^* && \text{sur } I_n
 \end{aligned}$$

(32)

Sous forme matricielle, ces équations peuvent être écrites, en écrivant (n-j) sous la forme nj, j = 1, 2, 3 ... :

$$\begin{matrix}
 5 & \left[\begin{array}{cccccccccccccccc}
 -\mathbf{M}_{00} & \mathbf{M}_{00}^* & \mathbf{M}_{01} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -\mathbf{Q}_{00} & \mathbf{Q}_{00}^* & \mathbf{Q}_{01} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \mathbf{M}_{10}^* & \mathbf{M}_{11} & -\mathbf{M}_{11}^* & -\mathbf{M}_{12} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \mathbf{Q}_{10}^* & \mathbf{Q}_{11} & -\mathbf{Q}_{11}^* & -\mathbf{Q}_{12} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \mathbf{M}_{21}^* & \mathbf{M}_{22} & -\mathbf{M}_{22}^* & -\mathbf{M}_{23} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \mathbf{Q}_{21}^* & \mathbf{Q}_{22} & -\mathbf{Q}_{22}^* & -\mathbf{Q}_{23} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mathbf{M}_{nln2}^* & \mathbf{M}_{nln1} & -\mathbf{M}_{nln1}^* & -\mathbf{M}_{nln} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mathbf{Q}_{nln2}^* & \mathbf{Q}_{nln1} & -\mathbf{Q}_{nln1}^* & -\mathbf{Q}_{nln} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \mathbf{M}_{mn1}^* & \mathbf{M}_{mn} & -\mathbf{M}_{mn}^* \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \mathbf{Q}_{mn1}^* & \mathbf{Q}_{mn} & -\mathbf{Q}_{mn}^*
 \end{array} \right]
 \end{matrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} \mathbf{A}_0 \\ \mathbf{A}_0^* \\ \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_1^* \\ \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_2^* \\ \mathbf{A}_3 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \mathbf{A}_{n1} \\ \mathbf{A}_{n1}^* \\ \mathbf{A}_n \\ \mathbf{A}_n^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{M}_{0S} \mathbf{A}_S \\ -\mathbf{Q}_{0S} \mathbf{A}_S \\ -\mathbf{M}_{1S} \mathbf{A}_S \\ -\mathbf{Q}_{1S} \mathbf{A}_S \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ 0 \\ -\mathbf{M}_{n1T} \mathbf{A}_T \\ -\mathbf{Q}_{n1T} \mathbf{A}_T \\ -\mathbf{M}_{nT} \mathbf{A}_T \\ -\mathbf{Q}_{nT} \mathbf{A}_T \end{pmatrix} \quad (33)$$

Pour compter le nombre d'équations et d'inconnues, on suppose qu'à chacune des interfaces I_1, I_2, \dots, I_{n-1} il y a N sources ponctuelles au-dessus de l'interface considérée et N sources ponctuelles au-dessous de cette interface. Sur les interfaces inférieure (I_0) and supérieure (I_{n+1}) il y a respectivement $2M_1$ et $2M_2$ sources ponctuelles en comptant les deux couches de sources au-dessus de la surface S et en dessous de la surface T . Ainsi, le nombre total de sources inconnues aux $n+1$ interfaces (y compris les surfaces S et T) est de $2[(n-1)N+M_1+M_2]$ et, en plus de ces sources inconnues, il y a M_1+M_2 sources connues \mathbf{A}_S et \mathbf{A}_T qui sont obtenues par l'équation (31). Le nombre total d'équations est également de $2[(n-1)N+M_1+M_2]$ parce qu'à chaque point commun de l'interface considérée, deux conditions doivent être satisfaites et que le nombre total de points communs considérés pour toutes les interfaces est de $[(n-1)N+M_1+M_2]$. Par conséquent, on résout de façon unique ce système d'équations.

L'équation matricielle (33) peut être écrite sous la forme symbolique:

$$\begin{aligned} [\mathbf{M}]\{\mathbf{A}\} &= \{\mathbf{V}_0\} \\ \Rightarrow \{\mathbf{A}\} &= [\mathbf{M}]^{-1}\{\mathbf{V}_0\} \end{aligned} \quad (33A)$$

Comme précisé ci-dessus, la dimension de la matrice \mathbf{M} est de $2[(n-1)N+M_1+M_2] \times 2[(n-1)N+M_1+M_2]$. Le nombre de vecteurs source inconnus est

également de $2[(n-1)N+M_1+M_2]$. Il en résulte que le vecteur source global est obtenu de façon unique.

On va maintenant examiner les interférences intervenant entre deux transducteurs en référence à la figure 15, et plus particulièrement les phénomènes de réflexions multiples entre deux interfaces consécutives.

On va d'abord examiner un exemple très simple, illustré sur la figure 15 : deux transducteurs S et T disposés face-à-face et séparés par un milieu homogène ML. La face active de chaque transducteur peut comporter des zones actives et des zones passives. Dans une zone active, la vitesse de surface des ondes V_{0S} (ou V_{0T}) en l'absence de tout effet d'interface est spécifiée. Dans une zone passive, la vitesse de surface est nulle lorsqu'elle n'est influencée par aucune autre source.

A_{S0} et A_{T0} sont des sources ponctuelles réparties sur les transducteurs S et T lorsque l'effet d'interaction entre elles est ignoré. En d'autres termes, A_{S0} et A_{T0} représentent des répartitions de sources ponctuelles servant à modéliser le champ généré par un transducteur dans un milieu homogène en l'absence de tout autre transducteur ou diffuseur.

Le champ A_{S0} est réfléchi par le transducteur T. On modélise ce champ en introduisant une nouvelle couche de sources A_{T1} réparties sur le transducteur T. En mettant en équation les vecteurs vitesse sur la surface S et produits par les sources A_{T1} et ceux dus à la réflexion du champ A_{S0} , on obtient:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{TT} \mathbf{A}_{T1} &= \mathbf{R}_T \mathbf{M}_{TS} \mathbf{A}_{S0} \\ \Rightarrow \mathbf{A}_{T1} &= [\mathbf{M}_{TT}]^{-1} \mathbf{R}_T \mathbf{M}_{TS} \mathbf{A}_{S0} = \mathbf{B} \mathbf{A}_{S0} \end{aligned} \quad (35)$$

Le champ généré par A_{T1} est ensuite réfléchi par le transducteur S. On modélise ce champ en introduisant une couche de sources A_{S2} réparties sur la surface du transducteur S. En mettant en équation les vecteurs vitesse sur la surface S et générés par les sources A_{S2} et ceux dus à la réflexion du champ A_{T1} , on obtient:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{SS} \mathbf{A}_{S2} &= \mathbf{R}_S \mathbf{M}_{ST} \mathbf{A}_{T1} \\ \Rightarrow \mathbf{A}_{S2} &= [\mathbf{M}_{SS}]^{-1} \mathbf{R}_S \mathbf{M}_{ST} \mathbf{A}_{T1} = \mathbf{C} \mathbf{A}_{T1} = \mathbf{C} \mathbf{B} \mathbf{A}_{S0} \end{aligned} \quad (36)$$

En répétant ces opérations pour toutes les autres réflexions, on obtient:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{T3} &= \mathbf{BCBA}_{S0} \\
\mathbf{A}_{S4} &= \mathbf{CBCBA}_{S0} \\
\mathbf{A}_{T5} &= \mathbf{BCBCBA}_{S0} \\
\mathbf{A}_{S6} &= \mathbf{CBCBCBA}_{S0}
\end{aligned} \tag{37}$$

De façon similaire, en partant des sources \mathbf{A}_{T0} et en combinant le champ sur la surface S venant de \mathbf{A}_{S1} et celui réfléchi par \mathbf{A}_{T0} on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_{SS}\mathbf{A}_{S1} &= \mathbf{R}_S\mathbf{M}_{ST}\mathbf{A}_{T0} \\
\Rightarrow \mathbf{A}_{S1} &= [\mathbf{M}_{SS}]^{-1}\mathbf{R}_S\mathbf{M}_{ST}\mathbf{A}_{T0} = \mathbf{CA}_{T0}
\end{aligned} \tag{38}$$

5 et :

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{T2} &= \mathbf{BCA}_{T0} \\
\mathbf{A}_{S3} &= \mathbf{CBCA}_{T0} \\
\mathbf{A}_{T4} &= \mathbf{BCBCA}_{T0} \\
\mathbf{A}_{S5} &= \mathbf{CBCBCA}_{T0}
\end{aligned} \tag{39}$$

Par conséquent, les vecteurs source au niveau des transducteurs S et T peuvent être exprimés ainsi:

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} \mathbf{A}_S \\ \mathbf{A}_T \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \mathbf{A}_{S0} + \mathbf{A}_{S1} + \mathbf{A}_{S2} + \mathbf{A}_{S3} + \dots \\ \mathbf{A}_{T0} + \mathbf{A}_{T1} + \mathbf{A}_{T2} + \mathbf{A}_{T3} + \dots \end{Bmatrix} \\
&= \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{C} \\ \mathbf{B} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{CB} & 0 \\ 0 & \mathbf{BC} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{CBC} \\ \mathbf{BCB} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{CBCB} & 0 \\ 0 & \mathbf{BCBC} \end{pmatrix} + \dots \right] \begin{Bmatrix} \mathbf{A}_{S0} \\ \mathbf{A}_{T0} \end{Bmatrix} \\
\Rightarrow \begin{Bmatrix} \mathbf{A}_S \\ \mathbf{A}_T \end{Bmatrix} &= [\mathbf{D}_0 + \mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2 + \mathbf{D}_3 + \dots] \mathbf{A}_0 = \mathbf{DA}_0
\end{aligned} \tag{40}$$

10

On peut alors obtenir les vecteurs vitesse et la répartition de la pression à partir des équations suivantes:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{V}_S \\ \mathbf{V}_T \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{SS} & \mathbf{M}_{ST} \\ \mathbf{M}_{TS} & \mathbf{M}_{TT} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{A}_S \\ \mathbf{A}_T \end{Bmatrix} = \mathbf{M}_0 \mathbf{A} = \mathbf{M}_0 \mathbf{DA}_0 = \mathbf{MA}_0 \tag{41}$$

15

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{P}_S \\ \mathbf{P}_T \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{SS} & \mathbf{Q}_{ST} \\ \mathbf{Q}_{TS} & \mathbf{Q}_{TT} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{A}_S \\ \mathbf{A}_T \end{Bmatrix} = \mathbf{Q}_0 \mathbf{A} = \mathbf{Q}_0 \mathbf{DA}_0 = \mathbf{QA}_0 \tag{42}$$

Si la vitesse des ondes émises par le transducteur est invariable, le vecteur source est obtenu de l'équation (41) :

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{M}^{-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{V}_S \\ \mathbf{V}_T \end{Bmatrix} \tag{43}$$

Si la surface de la zone active diffère de la surface totale du transducteur et si on ne spécifie que le vecteur vitesse sur la surface de la zone active, on a:

$$\mathbf{V} = \begin{Bmatrix} \mathbf{V}_S \\ \mathbf{V}_T \end{Bmatrix} = \mathbf{W} \begin{Bmatrix} \mathbf{V}_S \\ \mathbf{V}_T \end{Bmatrix} + \overline{\mathbf{W}} \begin{Bmatrix} \mathbf{V}_S \\ \mathbf{V}_T \end{Bmatrix} \quad (44)$$

On remarquera que $\mathbf{W} + \overline{\mathbf{W}}$ doit être une matrice d'identité. L'équation (44) peut aussi s'écrire:

$$\mathbf{V} = \begin{Bmatrix} \mathbf{V}_S \\ \mathbf{V}_T \end{Bmatrix} = \mathbf{W}\mathbf{M}_0\mathbf{D} \begin{Bmatrix} \mathbf{A}_{S0} \\ \mathbf{A}_{T0} \end{Bmatrix} + \overline{\mathbf{W}}\mathbf{M}_0\mathbf{D} \begin{Bmatrix} \mathbf{A}_{S0} \\ \mathbf{A}_{T0} \end{Bmatrix} \quad (45)$$

avec :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{V}_S \\ \mathbf{V}_T \end{Bmatrix}_{Active} = \mathbf{W} \begin{Bmatrix} \mathbf{V}_S \\ \mathbf{V}_T \end{Bmatrix} \quad (46)$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{A}_{S0} \\ \mathbf{A}_{T0} \end{Bmatrix}_{Active} = \mathbf{W} \begin{Bmatrix} \mathbf{A}_{S0} \\ \mathbf{A}_{T0} \end{Bmatrix}$$

par conséquent:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{V}_S \\ \mathbf{V}_T \end{Bmatrix}_{Active} = \mathbf{W}\mathbf{M}_0\mathbf{D}\mathbf{W} \begin{Bmatrix} \mathbf{A}_{S0} \\ \mathbf{A}_{T0} \end{Bmatrix} + \overline{\mathbf{W}}\mathbf{M}_0\mathbf{D}\overline{\mathbf{W}} \begin{Bmatrix} \mathbf{A}_{S0} \\ \mathbf{A}_{T0} \end{Bmatrix} = \mathbf{W}\mathbf{M}_0\mathbf{D}\mathbf{W} \begin{Bmatrix} \mathbf{A}_{S0} \\ \mathbf{A}_{T0} \end{Bmatrix} \quad (47)$$

Etant donné que \mathbf{A}_{S0} et \mathbf{A}_{T0} sont nuls dans les zones passives, le second terme de cette équation est nul. En éliminant alors les colonnes à contenu nul dans l'expression de $\mathbf{W}\mathbf{M}_0\mathbf{D}\mathbf{W}$ et en la définissant en tant que matrice \mathbf{E} , on obtient l'équation simplifiée suivante:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{V}_S \\ \mathbf{V}_T \end{Bmatrix}_{Active} = \mathbf{E} \begin{Bmatrix} \mathbf{A}_{S0} \\ \mathbf{A}_{T0} \end{Bmatrix}_{Active} \quad (48)$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \mathbf{A}_{S0} \\ \mathbf{A}_{T0} \end{Bmatrix}_{Active} = \mathbf{E}^{-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{V}_S \\ \mathbf{V}_T \end{Bmatrix}_{Active}$$

Le procédé de l'invention s'applique également au cas de la diffusion, et en particulier lorsque le diffuseur a une forme quelconque et est supposé homogène, comme illustré en figure 16. Un tel diffuseur peut être une inclusion, dans une couche de milieu homogène (appelé milieu 1), d'un matériau (appelé milieu 2). Dans un tel cas, on met en œuvre deux couches de sources ponctuelles : une première couche (\mathbf{A}_1) à l'intérieur du diffuseur, au contact de sa surface extérieure, et une seconde couche (\mathbf{A}_1^*) sur la surface extérieure de ce diffuseur, dans le milieu 1. En plus de ces deux couches de sources, on tient compte de deux couches de sources

ponctuelles A_S et A_T modélisant les transducteurs S et T. On obtient la valeur totale du champ dans le milieu 1 en superposant trois couches de sources A_S , A_T et A_1 , alors que le champ dans le milieu 2 est dû à une seule couche de sources A_1^* . En appliquant les conditions aux limites sur les surfaces des deux transducteurs et les conditions de continuité au passage de l'interface entre les deux milieux en question, on obtient:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_{SS}\mathbf{A}_S + \mathbf{M}_{ST}\mathbf{A}_T + \mathbf{M}_{S1}\mathbf{A}_1 &= \mathbf{V}_{S0} \\
 \mathbf{M}_{TS}\mathbf{A}_S + \mathbf{M}_{TT}\mathbf{A}_T + \mathbf{M}_{T1}\mathbf{A}_1 &= \mathbf{V}_{T0} \\
 \mathbf{M}_{1S}\mathbf{A}_S + \mathbf{M}_{1T}\mathbf{A}_T + \mathbf{M}_{11}\mathbf{A}_1 &= \mathbf{M}_{11}^*\mathbf{A}_1^* \\
 \mathbf{Q}_{1S}\mathbf{A}_S + \mathbf{Q}_{1T}\mathbf{A}_T + \mathbf{Q}_{11}\mathbf{A}_1 &= \mathbf{Q}_{11}^*\mathbf{A}_1^*
 \end{aligned} \tag{49}$$

cette équation peut être écrite sous la forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{SS} & \mathbf{M}_{S1} & 0 & \mathbf{M}_{ST} \\ \mathbf{M}_{1S} & \mathbf{M}_{11} & -\mathbf{M}_{11}^* & \mathbf{M}_{1T} \\ \mathbf{Q}_{1S} & \mathbf{Q}_{11} & -\mathbf{Q}_{11}^* & \mathbf{Q}_{1T} \\ \mathbf{M}_{TS} & \mathbf{M}_{T1} & 0 & \mathbf{M}_{TT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_S \\ \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_1^* \\ \mathbf{A}_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{S0} \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{V}_{T0} \end{bmatrix} \tag{50}$$

10 Cette équation matricielle est résolue pour les vecteurs source A_S , A_T , A_1 et A_1^* .

Le procédé exposé ci-dessus permet, en principe, de résoudre le problème de la modélisation des interactions en présence d'un diffuseur. Cependant, il reste à résoudre le problème du masquage dû à une telle inclusion. Ainsi, un point quelconque du milieu 1 (appelé ci-après point en question) ne "voit" pas toutes les sources ponctuelles de la couche A_1 , et il peut ne pas voir toutes les sources ponctuelles des deux transducteurs. Dans les exemples précédents (illustrés par les figures 9 à 15), pour des objets ne comportant que des interfaces planes, ce problème n'existait pas du fait que le point en question ne se trouvait jamais dans une zone masquée. Pour contourner cette difficulté, on suppose que les sources ponctuelles rayonnent de l'énergie dans une seule direction, à savoir dans un demi-espace, alors que l'autre demi-espace reste masqué, et si l'inclusion empêche le trajet des rayons émis par une source ponctuelle d'un transducteur d'atteindre ce point en question, on ignore la contribution de cette source ponctuelle. On a illustré en figure 17 cette façon de procéder, en reprenant les mêmes références qu'en figure 16.

25 On a représenté en figure 17 le point en question, marqué P et situé dans le milieu 1 et trois couches de sources ponctuelles (A_S , A_1 et A_T) qui contribuent à la

génération du champ calculé au point P. Si ces trois couches de sources ponctuelles ne rayonnent que dans le demi-espace avant et si le demi-espace arrière reste masqué, le diagramme de rayonnement relatif à ces trois couches de sources ponctuelles est tel que celui représenté par des petits croissants sur le figure 17. Le point P reçoit alors un rayonnement provenant de toutes les sources ponctuelles A_S situées entre les points A et B ainsi que de certaines des sources ponctuelles A_1 situées entre les points C et D (sur le milieu 2) et de toutes les sources ponctuelles A_T situées entre les points E et F. Cependant, en fait, à cause de la présence du diffuseur entre le point P et une partie des sources ponctuelles A_T situées entre les points F et G, le point P est excité seulement par les sources ponctuelles A_T situées entre les points E et G. (le rayon joignant P à G est tangent au milieu 2). Ainsi, pour mettre en œuvre le procédé de l'invention dans un tel cas, il faut déterminer quelles sources ponctuelles peuvent exciter le champ au point P, et ensuite, on annule les contributions de toutes les autres sources ponctuelles pour ce champ.

On va décrire, en référence à la figure 18, une méthode alternative pour ce même cas d'inclusion d'un diffuseur, plus facile à l'aide d'un programme de calcul.

On a représenté en figure 18, entre les transducteurs S et T, trois milieux au lieu des deux milieux de la figure 17. Le milieu 2 comporte la même inclusion que celle de la figure 17, et se prolonge par des couches planes. Ce milieu 2 est délimité par deux interfaces I1, I2 contournant l'inclusion et se prolongeant par des surfaces planes parallèles aux faces actives des transducteurs S et T et distantes entre elles d'une distance D inférieure à l'épaisseur maximale de l'inclusion (épaisseur maximale de l'inclusion, telle que déterminée sur une perpendiculaire aux faces actives des transducteurs). Le plan médian de ces surfaces planes des interfaces I1, I2 passe sensiblement par le centre C du milieu 2 (on a représenté sur le dessin sa trace TR, qui passe par C). On appelle milieu 1 celui se trouvant entre le transducteur S et l'interface I1, et milieu 3 celui se trouvant entre le transducteur T et l'interface I2.

On obtient les valeurs des champs dans les milieux 1, 2 et 3 en additionnant les contributions de deux couches de sources ponctuelles, comme suit:

Milieu 1: Somme des champs produits par A_S et A_1

Milieu 2: Somme des champs produits par A_1^* et A_2

Milieu 3: Sommation des champs produits par \mathbf{A}_2^* et \mathbf{A}_T

En respectant les conditions aux limites sur les faces actives des deux transducteurs S et T, et les conditions de continuité au passage des deux interfaces
5 séparant respectivement les milieux 1 et 2 d'une part, et les milieux 2 et 3 d'autre part, on obtient:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_{SS}\mathbf{A}_S + \mathbf{M}_{S1}\mathbf{A}_1 &= \mathbf{V}_{S0} \\
 \mathbf{M}_{TT}\mathbf{A}_T + \mathbf{M}_{T2}^*\mathbf{A}_2^* &= \mathbf{V}_{T0} \\
 \mathbf{M}_{1S}\mathbf{A}_S + \mathbf{M}_{11}\mathbf{A}_1 &= \mathbf{M}_{11}^*\mathbf{A}_1^* + \mathbf{M}_{12}\mathbf{A}_2 \\
 \mathbf{Q}_{1S}\mathbf{A}_S + \mathbf{Q}_{11}\mathbf{A}_1 &= \mathbf{Q}_{11}^*\mathbf{A}_1^* + \mathbf{Q}_{12}\mathbf{A}_2 \\
 \mathbf{M}_{21}^*\mathbf{A}_1^* + \mathbf{M}_{22}\mathbf{A}_2 &= \mathbf{M}_{22}^*\mathbf{A}_2^* + \mathbf{M}_{2T}\mathbf{A}_T \\
 \mathbf{Q}_{21}^*\mathbf{A}_1^* + \mathbf{Q}_{22}\mathbf{A}_2 &= \mathbf{Q}_{22}^*\mathbf{A}_2^* + \mathbf{Q}_{2T}\mathbf{A}_T
 \end{aligned} \tag{51}$$

On remarquera que dans l'exemple représenté en figure 18, seuls quelques points d'une petite zone peuvent se trouver dans une zone masquée, et le fait de n'en
10 pas tenir compte n'introduira qu'une erreur négligeable.

Si les propriétés du milieu 3 sont les mêmes que celles du milieu 1 et si la distance D est nulle, l'exemple de la figure 18 devient celui représenté en figure 19. Sur cette figure 19, les mêmes éléments que ceux de la figure 18 sont affectés des mêmes références, et du fait que, par hypothèse, les milieux 1 et 3 ont les mêmes
15 propriétés et la distance D est nulle, le milieu 2 est entièrement entouré par le milieu 1, et les deux interfaces I1 et I2 se réduisent à une interface virtuelle I0 passant par le centre C du milieu 2 et parallèle aux faces actives de T et S. La différence par rapport au cas représenté en figure 16 réside dans la détermination des sources ponctuelles. Ainsi, en figure 16, les quatre couches de sources sont \mathbf{A}_S , \mathbf{A}_T , \mathbf{A}_1 et \mathbf{A}_1^* ,
20 alors qu'en figure 19, les couches \mathbf{A}_S et \mathbf{A}_T sont identiques à celles de la figure 16, tandis que la couche \mathbf{A}_1 de la figure 16 se trouve divisée en deux couches \mathbf{A}_1 et \mathbf{A}_2^* dans la figure 19, et la couche \mathbf{A}_1^* de la figure 16 se trouve divisée en deux couches \mathbf{A}_2 et \mathbf{A}_1^* dans la figure 19.

L'équation (51) est modifiée de la façon suivante pour s'adapter au cas de la
25 figure 19 :

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_{SS}\mathbf{A}_S + \mathbf{M}_{S1}\mathbf{A}_1 + 0.\mathbf{A}_2^* &= \mathbf{V}_{S0} \\
\mathbf{M}_{TT}\mathbf{A}_T + 0.\mathbf{A}_1 + \mathbf{M}_{T2}^*\mathbf{A}_2^* &= \mathbf{V}_{T0} \\
\mathbf{M}_{1S}\mathbf{A}_S + \mathbf{M}_{11}\mathbf{A}_1 + 0.\mathbf{A}_2^* &= \mathbf{M}_{11}^*\mathbf{A}_1^* + \mathbf{M}_{12}\mathbf{A}_2 \\
\mathbf{Q}_{1S}\mathbf{A}_S + \mathbf{Q}_{11}\mathbf{A}_1 + 0.\mathbf{A}_2^* &= \mathbf{Q}_{11}^*\mathbf{A}_1^* + \mathbf{Q}_{12}\mathbf{A}_2 \\
\mathbf{M}_{21}^*\mathbf{A}_1^* + \mathbf{M}_{22}\mathbf{A}_2 &= \mathbf{M}_{22}^*\mathbf{A}_2^* + 0.\mathbf{A}_1 + \mathbf{M}_{2T}\mathbf{A}_T \\
\mathbf{Q}_{21}^*\mathbf{A}_1^* + \mathbf{Q}_{22}\mathbf{A}_2 &= \mathbf{Q}_{22}^*\mathbf{A}_2^* + 0.\mathbf{A}_1 + \mathbf{Q}_{2T}\mathbf{A}_T
\end{aligned} \tag{52}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_{SS}\mathbf{A}_S + [\mathbf{M}_{S1} \quad 0] \begin{Bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2^* \end{Bmatrix} &= \mathbf{V}_{S0} \\
\mathbf{M}_{TT}\mathbf{A}_T + [0 \quad \mathbf{M}_{T2}^*] \begin{Bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2^* \end{Bmatrix} &= \mathbf{V}_{T0} \\
\mathbf{M}_{1S}\mathbf{A}_S + [\mathbf{M}_{11} \quad 0] \begin{Bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2^* \end{Bmatrix} &= [\mathbf{M}_{11}^* \quad \mathbf{M}_{12}] \begin{Bmatrix} \mathbf{A}_1^* \\ \mathbf{A}_2 \end{Bmatrix} \\
\mathbf{Q}_{1S}\mathbf{A}_S + [\mathbf{Q}_{11} \quad 0] \begin{Bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2^* \end{Bmatrix} &= [\mathbf{Q}_{11}^* \quad \mathbf{Q}_{12}] \begin{Bmatrix} \mathbf{A}_1^* \\ \mathbf{A}_2 \end{Bmatrix} \\
[\mathbf{M}_{21}^* \quad \mathbf{M}_{22}] \begin{Bmatrix} \mathbf{A}_1^* \\ \mathbf{A}_2 \end{Bmatrix} &= [0 \quad \mathbf{M}_{22}^*] \begin{Bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2^* \end{Bmatrix} + \mathbf{M}_{2T}\mathbf{A}_T \\
[\mathbf{Q}_{21}^* \quad \mathbf{Q}_{22}] \begin{Bmatrix} \mathbf{A}_1^* \\ \mathbf{A}_2 \end{Bmatrix} &= [0 \quad \mathbf{Q}_{22}^*] \begin{Bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2^* \end{Bmatrix} + \mathbf{Q}_{2T}\mathbf{A}_T
\end{aligned} \tag{53}$$

l'équation (53) s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$5 \quad \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{SS} & [\mathbf{M}_{S1} \quad 0] & [0 \quad 0] & 0 \\ \mathbf{M}_{1S} & [\mathbf{M}_{11} \quad 0] & -[\mathbf{M}_{11}^* \quad \mathbf{M}_{12}] & \begin{Bmatrix} 0 \\ \mathbf{M}_{2T} \end{Bmatrix} \\ 0 & [0 \quad \mathbf{M}_{22}^*] & -[\mathbf{M}_{21}^* \quad \mathbf{M}_{22}] & \begin{Bmatrix} 0 \\ \mathbf{M}_{2T} \end{Bmatrix} \\ \mathbf{Q}_{1S} & [\mathbf{Q}_{11} \quad 0] & -[\mathbf{Q}_{11}^* \quad \mathbf{Q}_{12}] & \begin{Bmatrix} 0 \\ \mathbf{Q}_{2T} \end{Bmatrix} \\ 0 & [0 \quad \mathbf{Q}_{22}^*] & -[\mathbf{Q}_{21}^* \quad \mathbf{Q}_{22}] & \begin{Bmatrix} 0 \\ \mathbf{Q}_{2T} \end{Bmatrix} \\ 0 & [0 \quad \mathbf{M}_{T2}^*] & [0 \quad 0] & \mathbf{M}_{TT} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{A}_S \\ \begin{Bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2^* \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \mathbf{A}_1^* \\ \mathbf{A}_2 \end{Bmatrix} \\ \mathbf{A}_T \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{V}_{S0} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{V}_{T0} \end{Bmatrix} \tag{54}$$

La résolution de l'équation (54) permet, au contraire de la résolution de l'équation (50), de résoudre les problèmes liés aux zones masquées.

REVENDEICATIONS

1. Procédé de modélisation des interactions dans un système entre au moins une onde et au moins un objet, la surface de chaque objet définissant une interface
- 5 entre au moins deux milieux, caractérisé en ce qu'il comporte les étapes suivantes :
- on définit les propriétés physiques de chaque milieu considéré composant le système (E2),
 - on définit la structure géométrique de chaque objet du système en le maillant et on positionne à la surface de chaque maille au moins un point
 - 10 test,
 - en chaque point test, on définit au moins une grandeur test pour chaque milieu considéré afin d'établir des équations de continuité pour les conditions aux limites,
 - on associe de chaque côté de chaque maille au moins une source
 - 15 élémentaire ponctuelle,
 - on positionne les objets les uns par rapport aux autres dans l'espace,
 - on associe des milieux aux volumes délimités par les objets,
 - on détermine le type de conditions aux limites pour chaque interface (E7),
 - on construit la matrice globale des interactions entre les différents objets
 - 20 (E8), cette matrice étant constituée d'au moins un bloc matriciel caractérisant les interactions entre les objets pris deux à deux, ces interactions étant liées à la propagation de l'onde dans le milieu considéré, la matrice globale comportant au maximum autant de blocs qu'il y a de combinaisons possibles entre tous les objets pris deux à eux,
 - 25 le contenu de chaque bloc dépendant du type de conditions aux limites fixées sur les points test, des propriétés du milieu commun aux deux objets considérés, et de la configuration géométrique de ces objets,
 - on inverse la matrice globale,
 - on multiplie la matrice inversée par une matrice colonne contenant les
 - 30 valeurs des conditions aux limites d'excitation imposée par l'utilisateur, et, le cas échéant, des zéros correspondant aux conditions aux limites intrinsèques,

- on obtient une matrice colonne contenant les valeurs de l'ensemble des sources ponctuelles élémentaires (E9),
 - on calcule en tout point d'observation du système les grandeurs physiques représentatives des interactions au sein du système en fonction des zones d'influence considérées des sources ponctuelles ;
- 5
- on obtient un modèle analytique des interactions au sein du système.
2. Procédé selon la revendication 1, caractérisé en ce que l'on répartit les points test aléatoirement d'une maille à la suivante de façon à éviter de privilégier au moins une direction de propagation particulière.
- 10 3. Procédé selon la revendication 1 ou 2, caractérisé en ce que l'on calcule des grandeurs macroscopiques dans au moins une partie du système.
4. Procédé selon l'une des revendications précédentes, caractérisé en ce que l'on visualise les grandeurs physiques créées par l'ensemble des sources ponctuelles élémentaires (E13).
- 15 5. Procédé selon l'une des revendications précédentes, caractérisé en ce que l'on définit des objets à volume fermé dont la surface est à chaque fois obligatoirement fermée et constitue une frontière entre le milieu extérieur à l'objet et un milieu interne à l'objet, et on définit des objets à volume ouvert dont la surface est ouverte du fait qu'elle représente une interface entre
- 20 milieux semi infinis (E6).
6. Procédé selon la revendication 5, caractérisé en ce que lorsque cette interface est créée, elle est bornée latéralement par un ensemble de frontières qui sont celles du volume dans lequel est étudiée l'interaction.
- 7 Procédé selon l'une des revendications précédentes, caractérisé en ce que
- 25 l'on utilise deux sortes de conditions aux limites, les conditions aux limites intrinsèques et les conditions aux limites fixées par l'utilisateur, les premières traduisant la continuité des grandeurs scalaires et/ou vectorielles au passage d'une interface entre deux milieux de propriétés déterminées ou déterminables, et les secondes traduisant la connaissance *a priori* qu'a
- 30 l'utilisateur de la grandeur scalaire et/ou vectorielle pour une interface.

8 Procédé selon la revendication 7 caractérisé en ce que les conditions aux limites fixées par l'utilisateur sont satisfaites grâce à un seul ensemble de sources situé d'un côté de l'interface.

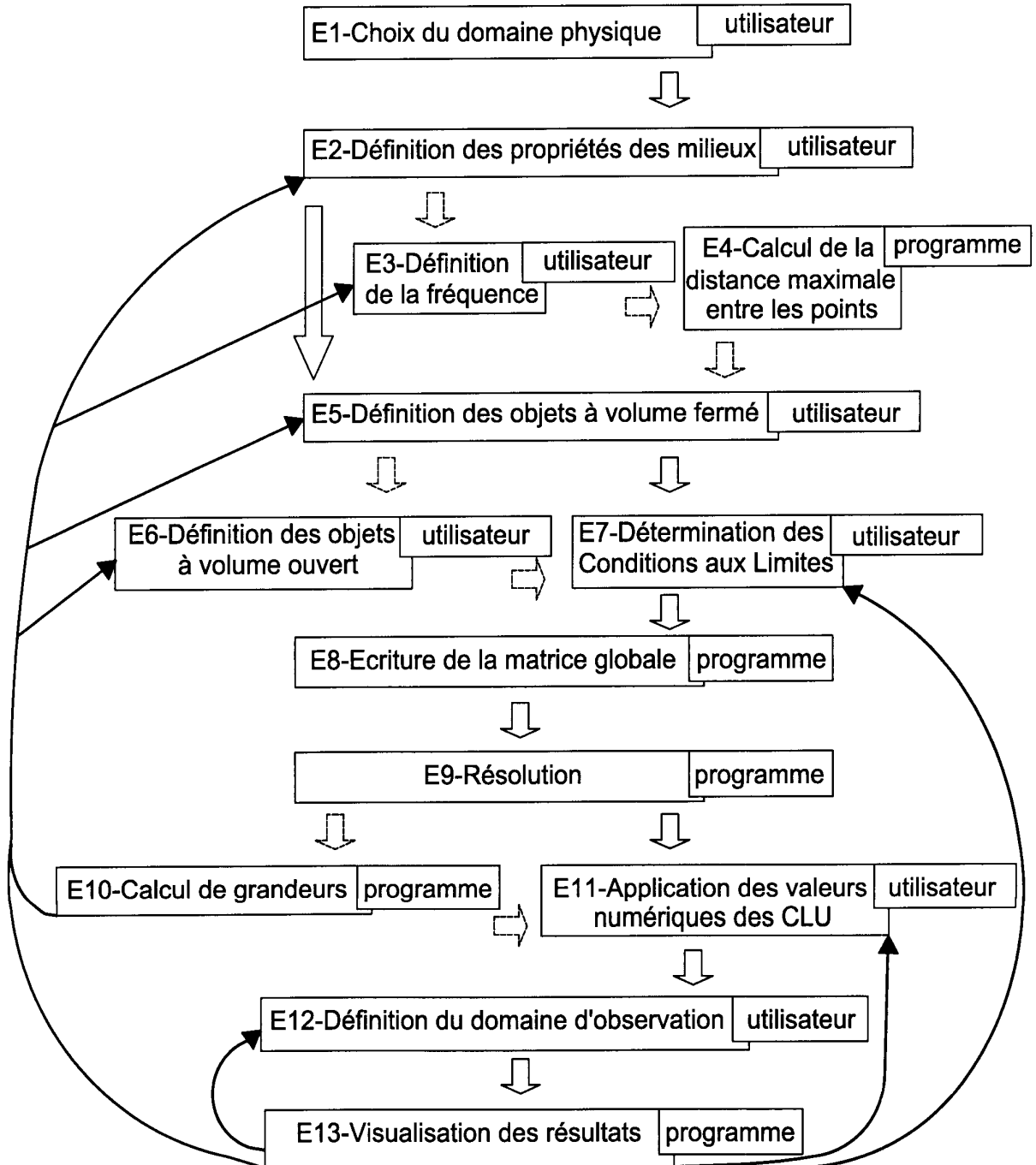


FIG.1

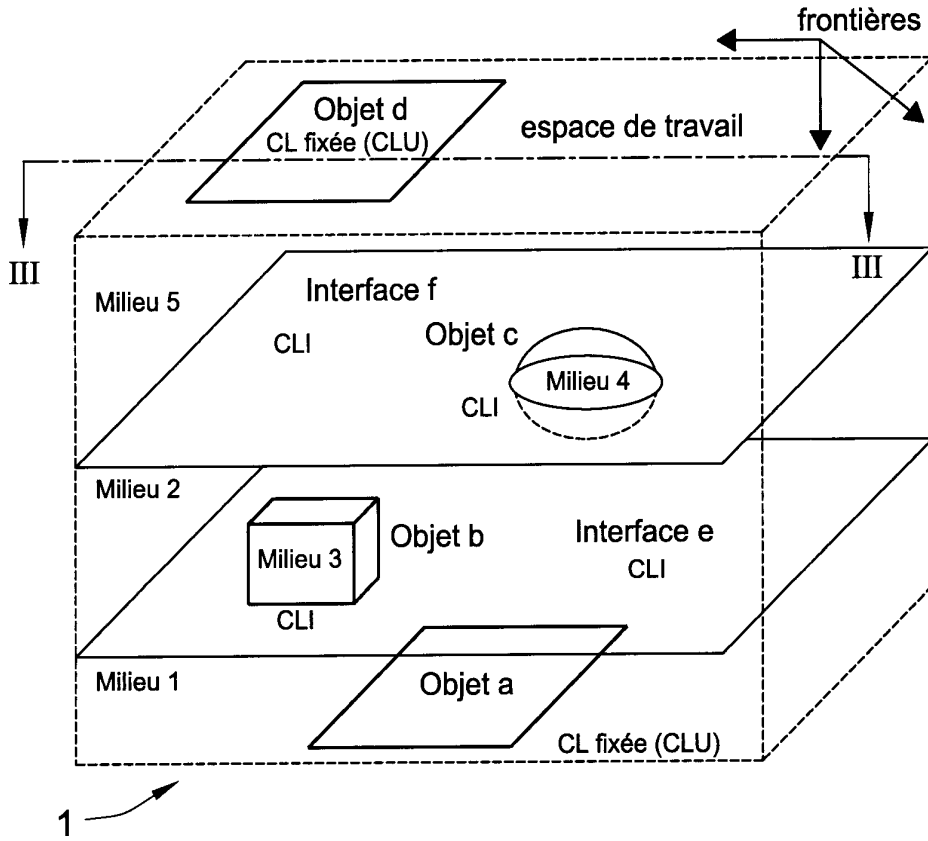


FIG.2

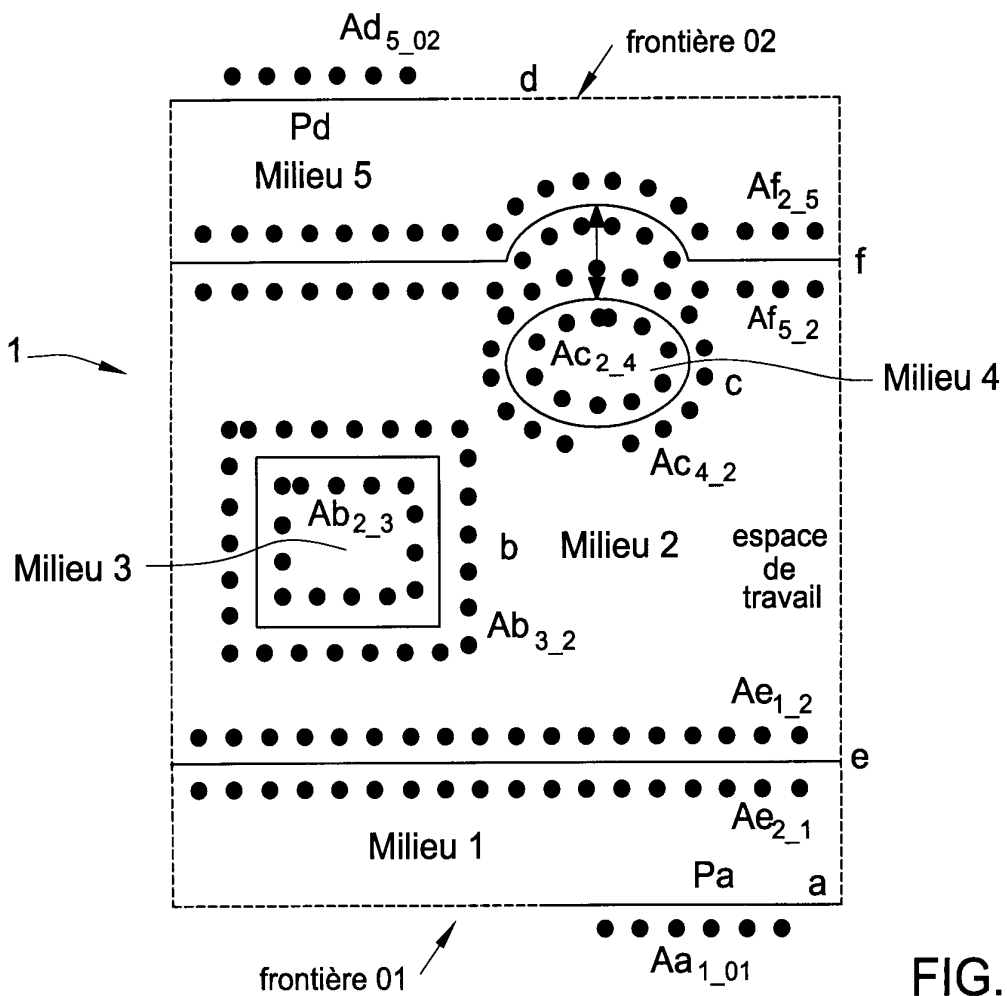


FIG.3

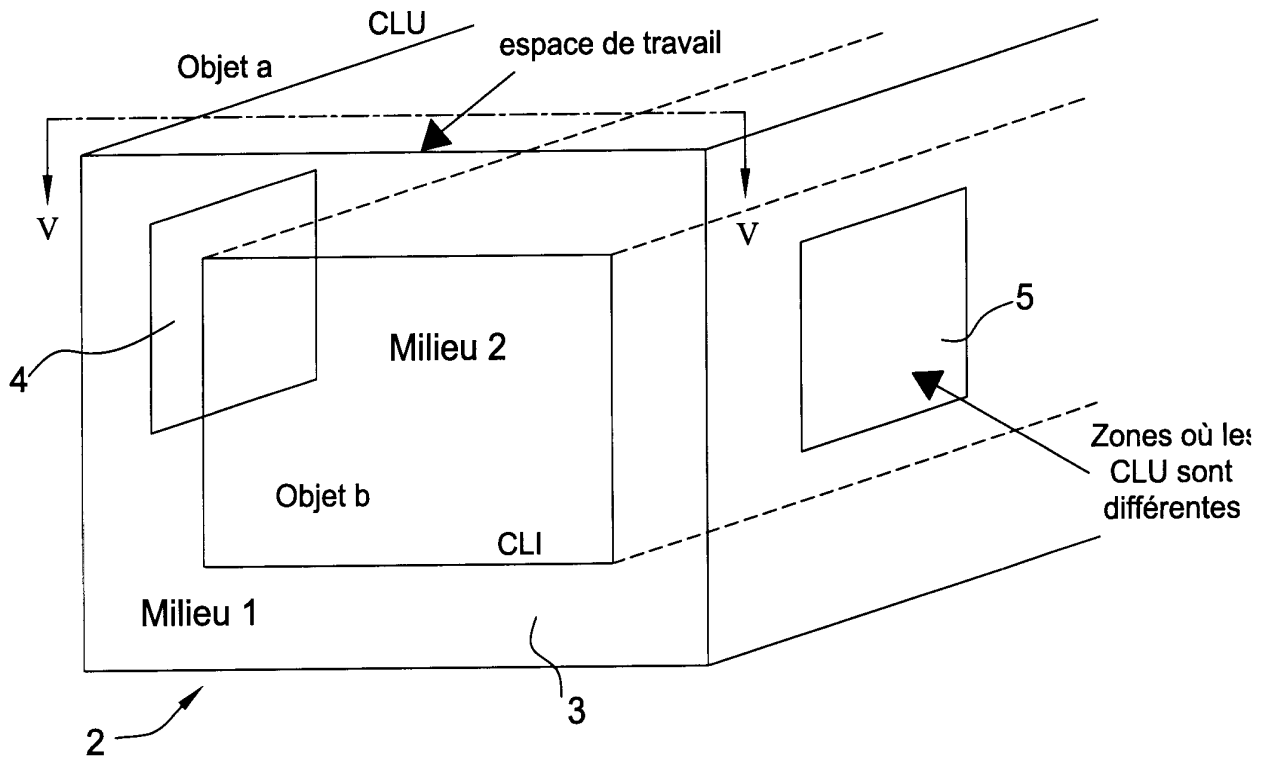


FIG.4

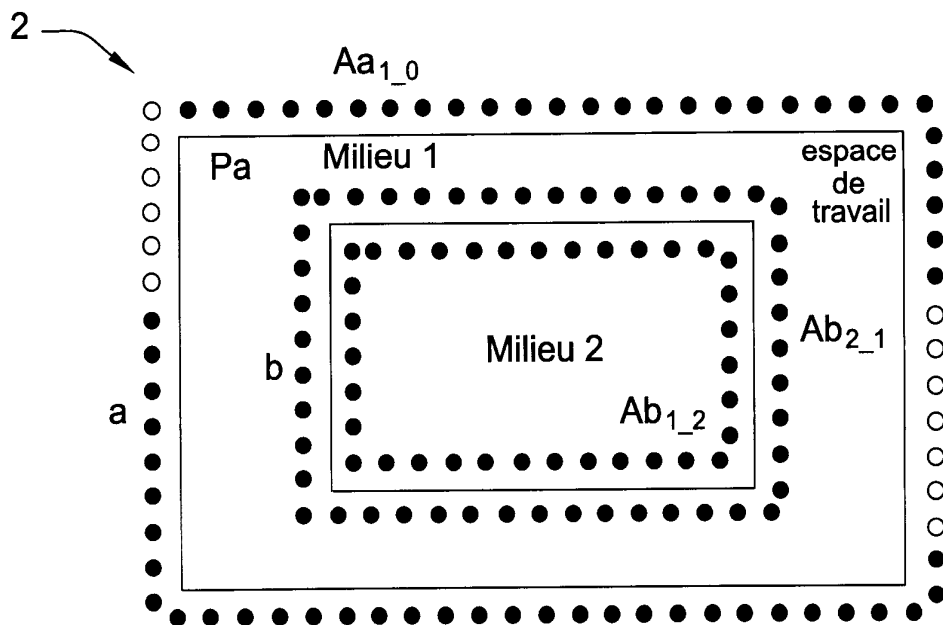


FIG.5

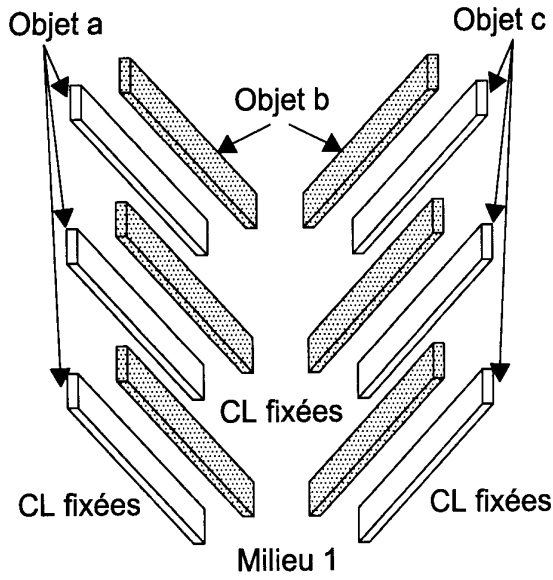


FIG.6

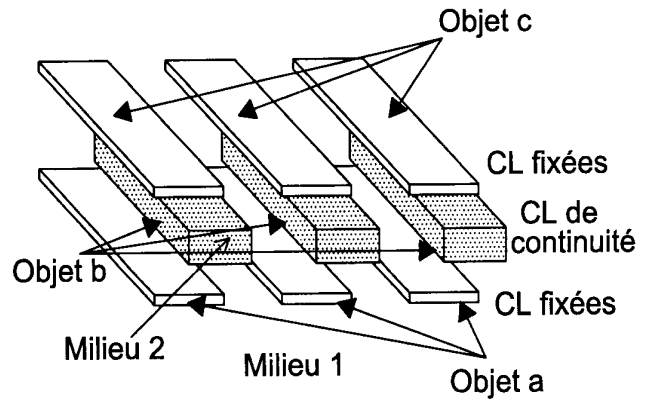


FIG.7

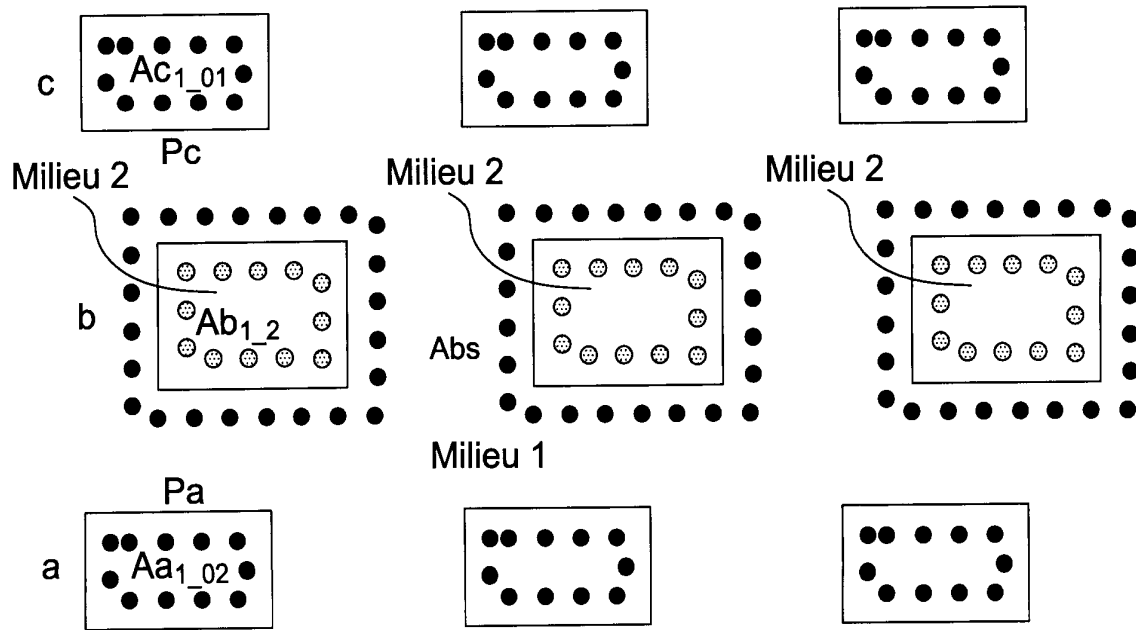


FIG.8

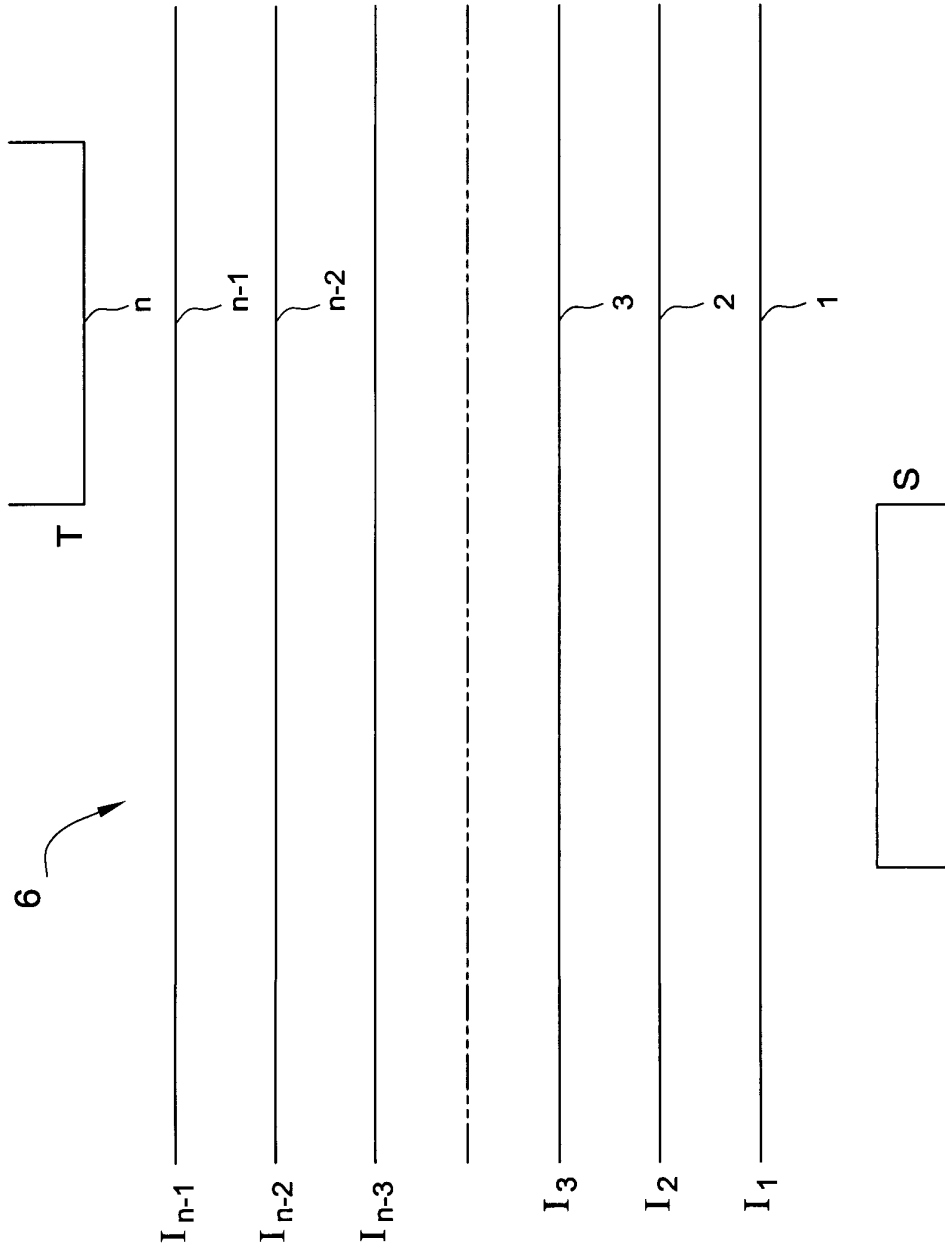


FIG.9

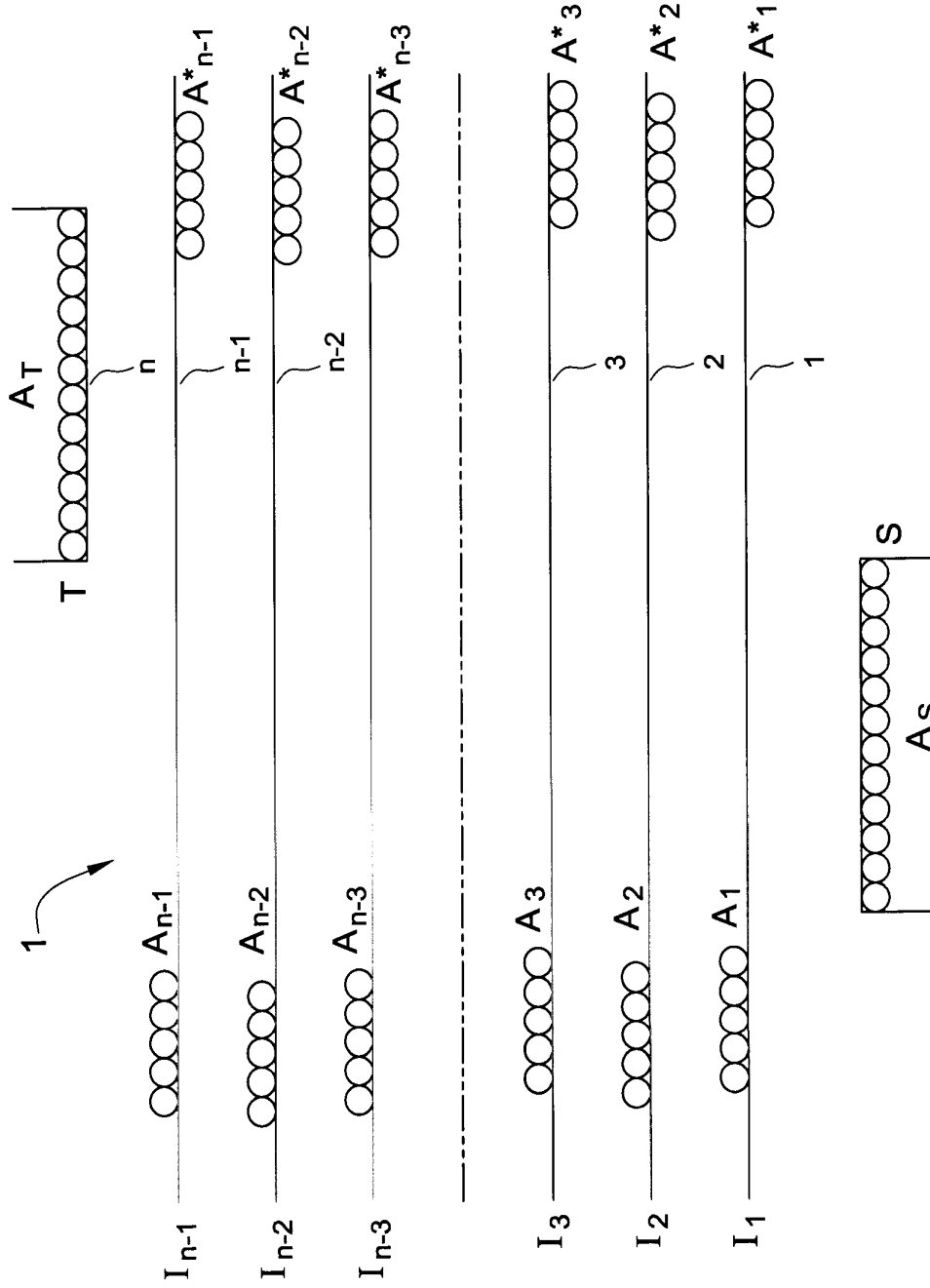


FIG.10

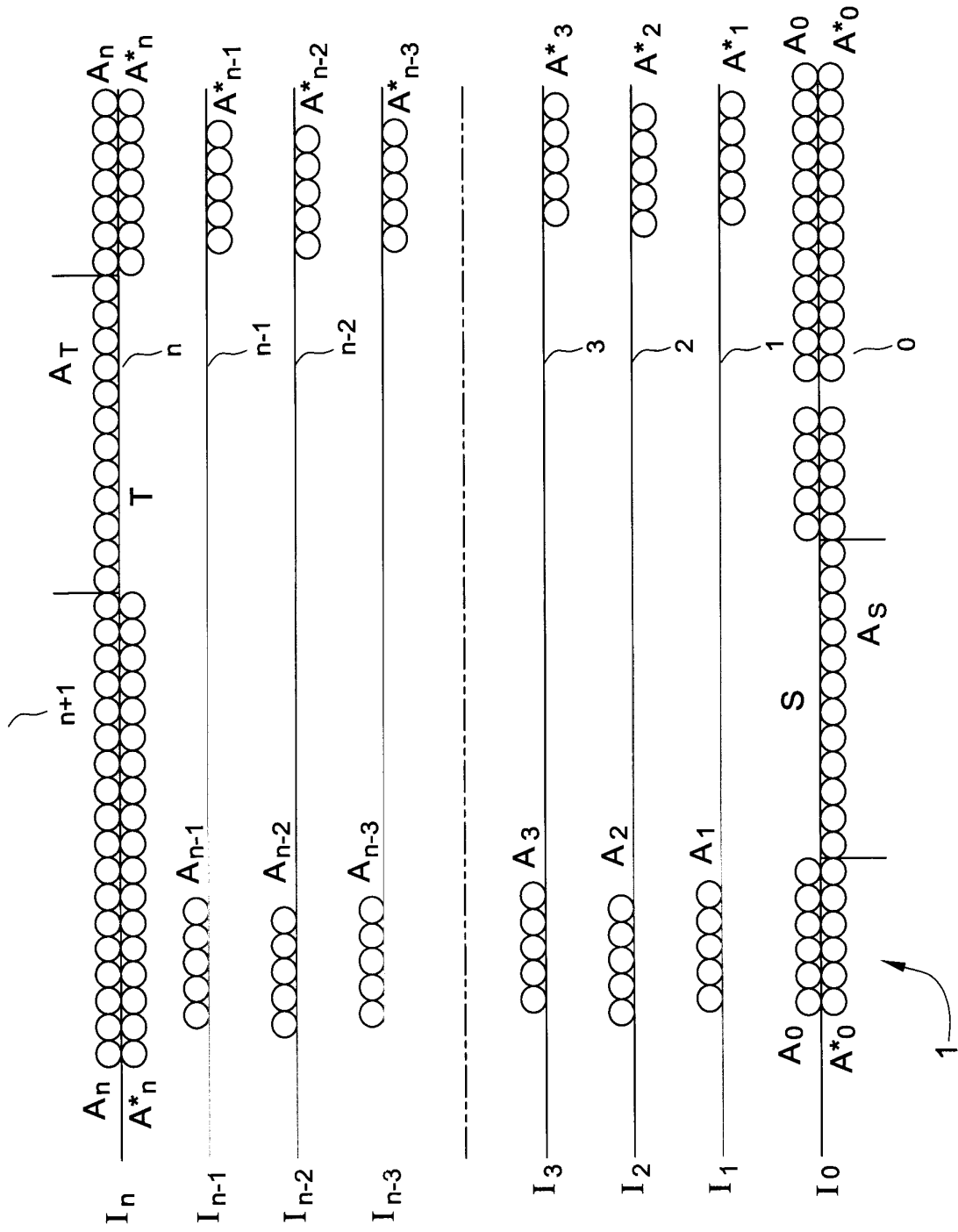


FIG.11

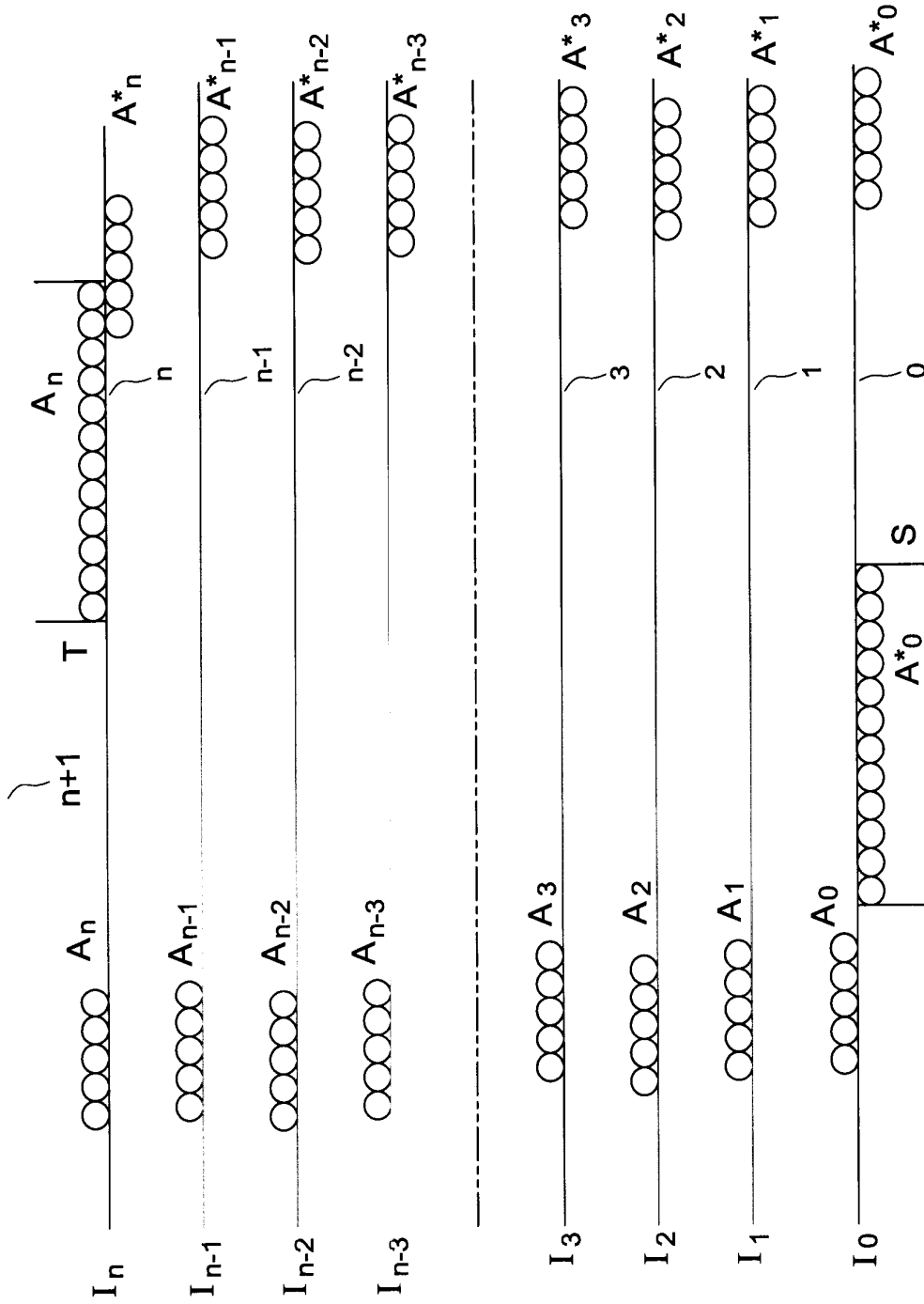


FIG.12

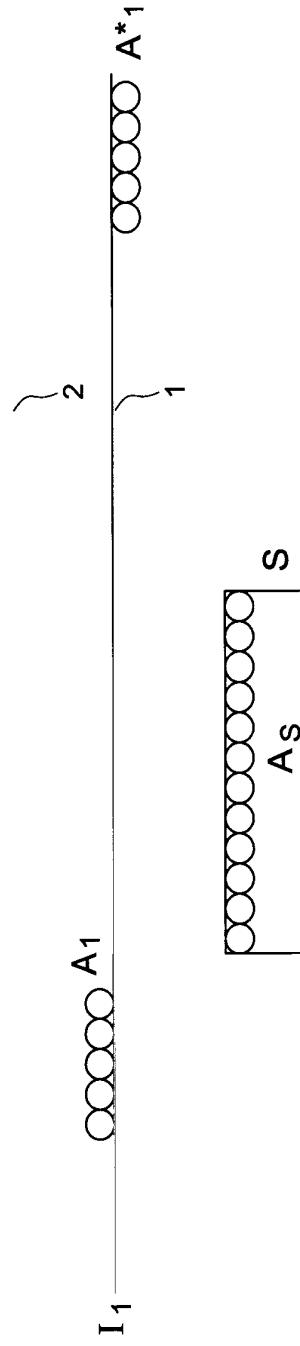


FIG.13

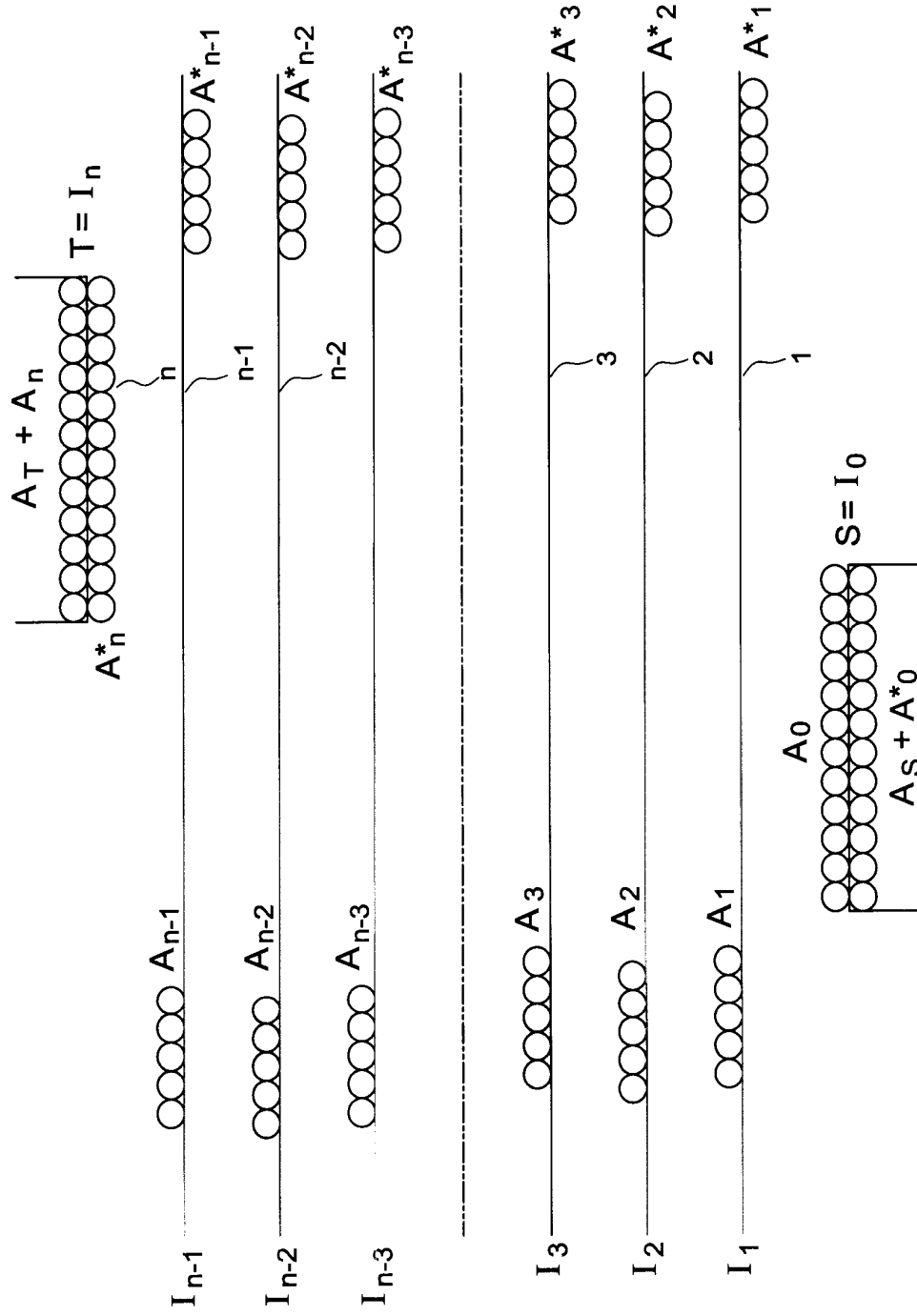


FIG.14

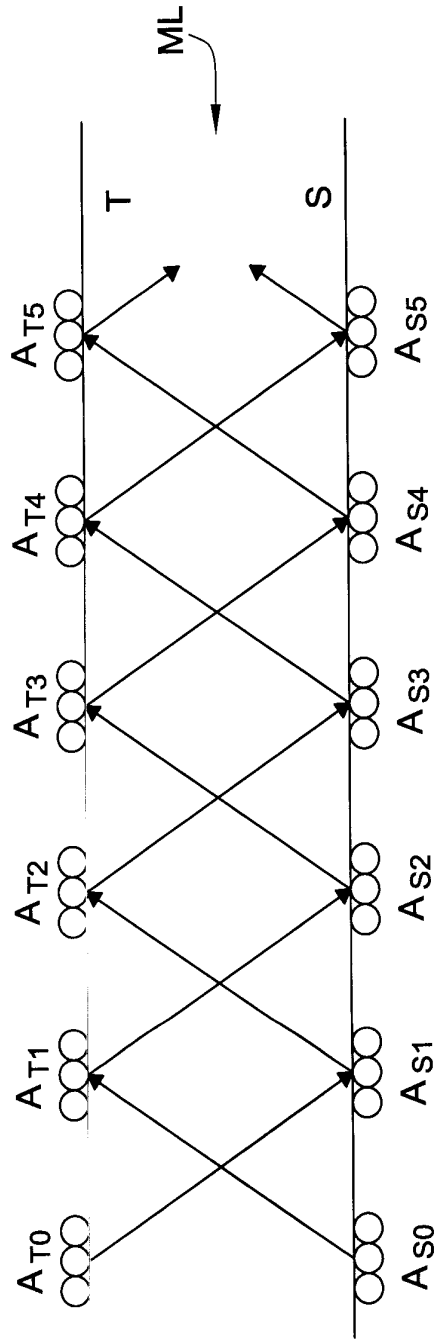


FIG.15

12/13

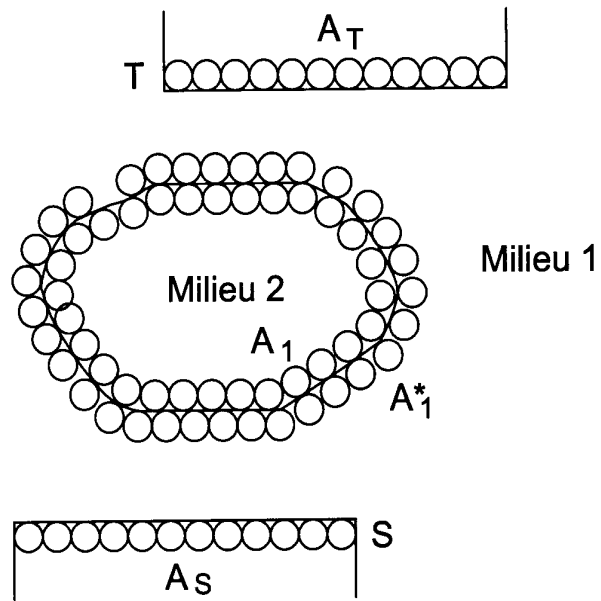


FIG.16

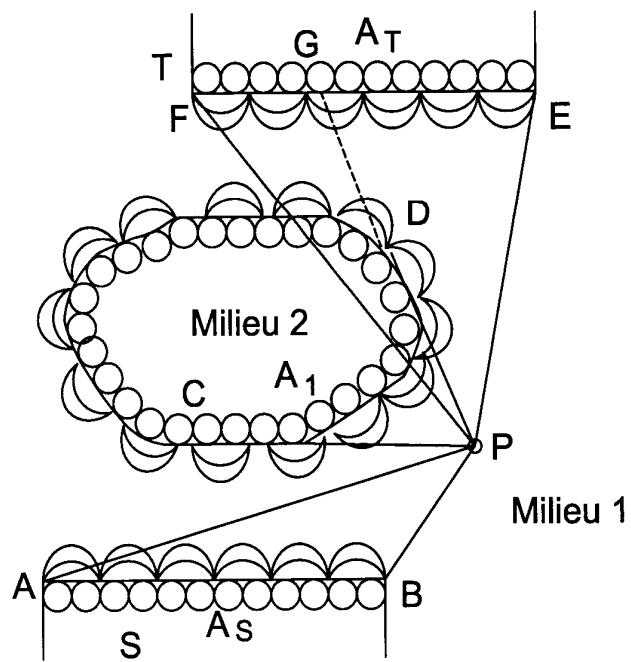


FIG.17

13/13

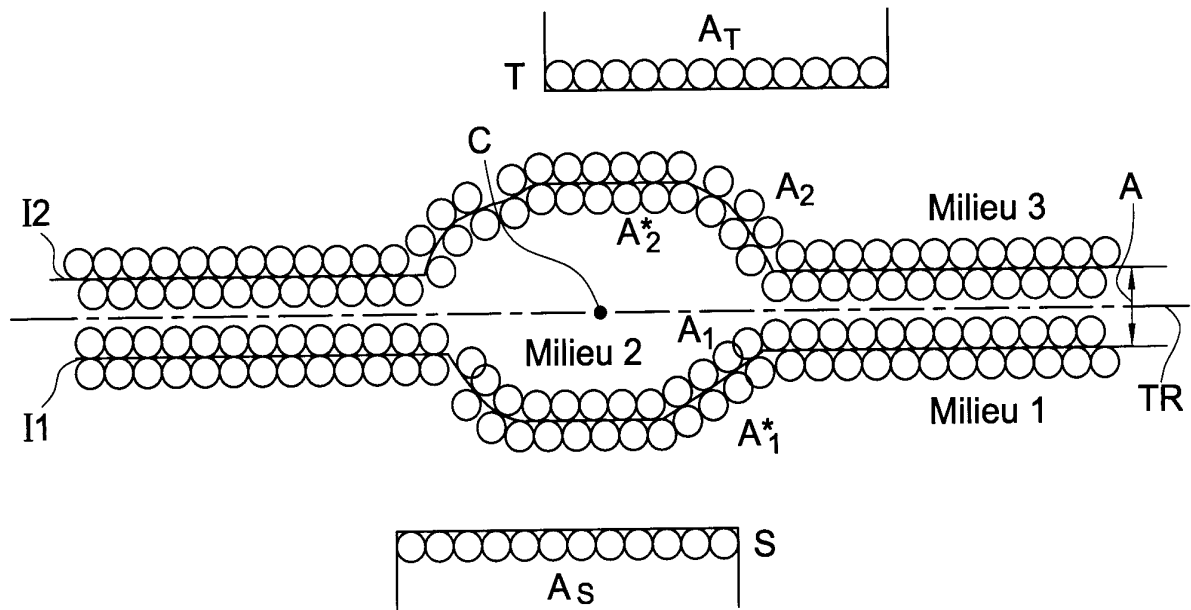


FIG.18

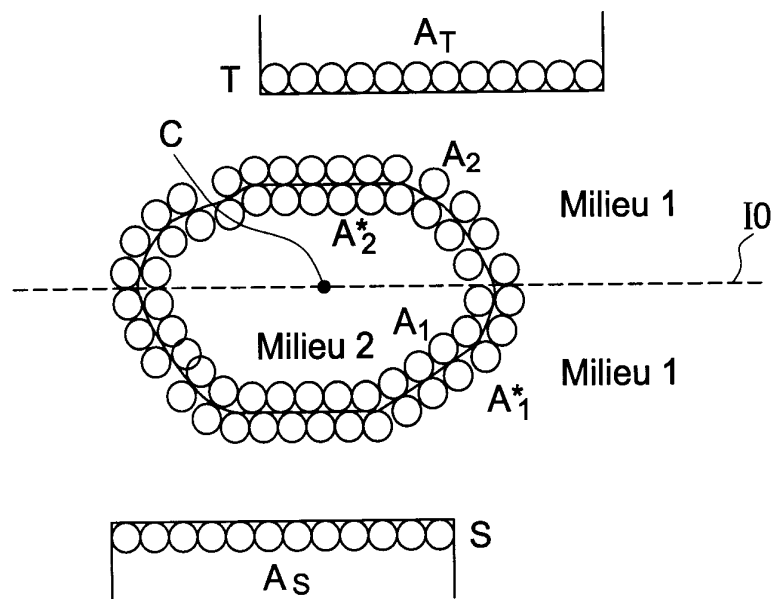


FIG.19



**RAPPORT DE RECHERCHE
PRÉLIMINAIRE**

établi sur la base des dernières revendications
déposées avant le commencement de la recherche

N° d'enregistrement
national

FA 675651
FR 0513219

DOCUMENTS CONSIDÉRÉS COMME PERTINENTS		Revendication(s) concernée(s)	Classement attribué à l'invention par l'INPI	
Catégorie	Citation du document avec indication, en cas de besoin, des parties pertinentes			
X	<p>TRIBIKRAM KUNDU, DOMINIQUE PLACKO: "Modeling of Ultrasonic Field by Distributed Point Source Method (Chapter 2 of Ultrasonic nondestructive evaluation: engineering and biological material characterization)" 2004, CRC PRESS, ISBN 0-8493-1462-3 , XP002385842 * chapitre 2.5, 2.5.1, 2.5.2: titres * * figures 2.8,2.11,2.12,2.13 * * page 172, lignes 7-9,20 * * equations 2.52, 2.15d, 2.15h, 2.15j, 2.15l * * page 173, lignes 1,2 *</p> <p style="text-align: center;">-----</p>	1-8	G06F17/50	
X	<p>PLACKO D ET AL: "Ultrasonic field computation in the presence of a scatterer of finite dimension" PROCEEDINGS OF THE SPIE - THE INTERNATIONAL SOCIETY FOR OPTICAL ENGINEERING SPIE-INT. SOC. OPT. ENG USA, vol. 5047, 2003, pages 169-179, XP002385609 ISSN: 0277-786X * figures 3,4 * * equations 11-13 *</p> <p style="text-align: center;">-----</p>	1		<p>DOMAINES TECHNIQUES RECHERCHÉS (IPC)</p> <p>G06F</p>
A	<p>AHMAD RAIS ET AL: "Modeling of phased array transducers" JOURNAL OF THE ACOUSTICAL SOCIETY OF AMERICA, AIP / ACOUSTICAL SOCIETY OF AMERICA, MELVILLE, NY, US, vol. 117, no. 4, avril 2005 (2005-04), pages 1762-1776, XP012072864 ISSN: 0001-4966 * chapitre C. Matrix formulation * * figure 6 *</p> <p style="text-align: center;">-----</p> <p style="text-align: center;">-/--</p>	1-8		
Date d'achèvement de la recherche		Examineur		
22 juin 2006		Wellisch, J.P.		
<p>CATÉGORIE DES DOCUMENTS CITÉS</p> <p>X : particulièrement pertinent à lui seul Y : particulièrement pertinent en combinaison avec un autre document de la même catégorie A : arrière-plan technologique O : divulgation non-écrite P : document intercalaire</p>		<p>T : théorie ou principe à la base de l'invention E : document de brevet bénéficiant d'une date antérieure à la date de dépôt et qui n'a été publié qu'à cette date de dépôt ou qu'à une date postérieure. D : cité dans la demande L : cité pour d'autres raisons & : membre de la même famille, document correspondant</p>		

EPO FORM 1503 12.99 (P04C14) 5



**RAPPORT DE RECHERCHE
PRÉLIMINAIRE**

établi sur la base des dernières revendications
déposées avant le commencement de la recherche

N° d'enregistrement
national

FA 675651
FR 0513219

DOCUMENTS CONSIDÉRÉS COMME PERTINENTS		Revendication(s) concernée(s)	Classement attribué à l'invention par l'INPI
Catégorie	Citation du document avec indication, en cas de besoin, des parties pertinentes		
A	LIEBEAUX N ET AL: "The distributed sources method: a concept for open magnetic cores modelling" EUROPEAN PHYSICAL JOURNAL APPLIED PHYSICS, EDP SCIENCES, LES ULIS, FR, vol. 20, no. 2, novembre 2002 (2002-11), pages 145-150, XP008021970 ISSN: 1286-0042 * figures 1,2,4 * * chapitres 2.2, 2.3, 4.1 * -----	1,4,5	DOMAINES TECHNIQUES RECHERCHÉS (IPC)
A	CRUAU AURELIE ET AL: "V-shaped micromechanical tunable capacitors for RF applications" MICROSYST TECHNOL; MICROSYSTEM TECHNOLOGIES; SYMPOSIUM ON DESIGN, TEST, INTEGRATION AND PACKAGING OF MEMS/MOEMS DECEMBER 2005, vol. 12, no. 1-2 SPEC. ISS., 25 octobre 2005 (2005-10-25), pages 15-20, XP002385849 * figures 6,7 * * chapitre 3 *	1,5	
A	PLACKO D ET AL: "Theoretical computation of acoustic pressure generated by ultrasonic sensors in the presence of an interface" PROCEEDINGS OF THE SPIE - THE INTERNATIONAL SOCIETY FOR OPTICAL ENGINEERING SPIE-INT. SOC. OPT. ENG USA, vol. 4702, 2002, pages 157-168, XP008021971 ISSN: 0277-786X * abrégé * -----	1	
Date d'achèvement de la recherche		Examineur	
22 juin 2006		Wellisch, J.P.	
<p>CATÉGORIE DES DOCUMENTS CITÉS</p> <p>X : particulièrement pertinent à lui seul Y : particulièrement pertinent en combinaison avec un autre document de la même catégorie A : arrière-plan technologique O : divulgation non-écrite P : document intercalaire</p> <p>T : théorie ou principe à la base de l'invention E : document de brevet bénéficiant d'une date antérieure à la date de dépôt et qui n'a été publié qu'à cette date de dépôt ou qu'à une date postérieure. D : cité dans la demande L : cité pour d'autres raisons & : membre de la même famille, document correspondant</p>			

5
EPO FORM 1503 12.99 (P04C14)